CÁLCULO L1 — PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS
PROBLEMAS DE DERIVAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

1. Introdução

Todos os problemas apresentados nesta lista foram retirados de provas realizadas na disciplina Cálculo 1 na Área II no final da década de 80 e início da década de 90. Foram colecionados pelo professor da disciplina por volta de 1992 que, por quatro anos seguidos, lecionou Cálculo 1. Estes exercícios servem de complemento aos apresentados nas notas de aulas. Antes de cada exercício vem a indicação de que prova foi retirado, por exemplo, *(I.89.1.pe)*: problema retirado do primeiro exercício *(pe)* de Cálculo 1 *(I)* do primeiro semestre *(1)* de 1989 *(89)*.

2. Cálculo de derivadas pela definição

2.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.89.1.pe)* Dada a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^5 sen\frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases} .$$

Calcule a derivada de f para $x = 0$ pela definição.

Solução: Pela definição temos que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^5 sen\frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x^4 sen\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Como, para $x \neq 0$,

$$-x^4 \leq x^4 sen\frac{1}{x} \leq x^4,$$

temos pelo lema do sanduiche que

$$\lim_{x\to 0} x^4 sen\frac{1}{x} = 0,$$

já que $-x^4$ e x^4 tendem a 0 quando x tende a 0. Logo $f'(0) = 0$.

(2) *(I.92.1.pe)* Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ a + bx^2 & x > 1 \end{cases} .$$

Determine a e b de modo que $f(x)$ seja diferenciável.

Primeira solução: Observe que a derivada de $f(x)$ para $x \neq 1$ é igual a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 2bx & x > 1 \end{cases}.$$

Temos um problema no ponto $x = 1$ pois perto deste ponto $f(x)$ é dada por duas equações distintas. Temos de calcular a derivada neste ponto pela definição

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Observe que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ (a - 1 + bx^2)/(x - 1) & x > 1 \end{cases}.$$

Para que $f'(1)$ exista temos de ter

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

e daí

$$1 = \lim_{x \to 1^+} \frac{a - 1 + bx^2}{x - 1}.$$

Como o denominador tende a 0, então o numerador também tem de tender a 0 quando x tende a 1. Logo $a - 1 + b = 0$ ou $a - 1 = -b$ e daí

$$a - 1 + bx^2 = -b + bx^2 = b(x^2 - 1)$$

$$1 = \lim_{x \to 1^+} \frac{a - 1 + bx^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{b(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} b(x + 1) = 2b.$$

Logo $b = \frac{1}{2}$ e $a = 1 - b = \frac{1}{2}$.

Segunda solução: Vamos usar o resultado: se h e g são duas funções definidas em um intervalo aberto I contínuas e diferenciáveis em $a \in I$, então a função

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq a \\ h(x) & x > a \end{cases}$$

definida no intervalo I tem derivada em $x = a$ se só se $h(a) = g(a)$ e $h'(a) = g'(a)$ (isto é, no ponto de junção das duas funções elas possuem o mesmo valor e a mesma derivada).

Isso ocorre porque para $f(x)$ ser diferenciável em $x = a$, tem de ser contínua neste ponto e daí

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Pela definição de f e por h e g serem contínuas em $x = a$ temos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = h(a)$$

e daí $h(a) = g(a)$. Para f ser diferenciável em $x = a$ temos de ter

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Mas

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a).$$

Logo $h'(a)=g'(a)$.

Aplicando este resultado neste problema, onde $g(x)=x$ e $h(x)=a+bx^2$ temos $1=g(1)=h(1)=a+b$ e $1=g'(1)=h'(1)=2b$. E daí $a=b=\frac{1}{2}$.

2.2. **Problemas propostos.**

(1) *(I.83.1.se)* Considere a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x-2} & \text{se } x>0, x\neq 2\\ x^2+\frac{1}{2} & \text{se } x\leq 0\end{cases}.$$

(i) f é contínua em $x=0$? (Justifique sua resposta)
(ii) A curva $y=f(x)$ tem tangente em $x=0$? (Justifique sua resposta)
(iii) Determine a equação cartesiana da reta normal à curva $y=f(x)$ em $x=1$.
(iv) Esboce o gráfico da curva $y=f(x)$.

(2) *(I.86.1.pe)* Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{se } x\leq 1\\ \frac{2}{x} & \text{se } x>1\end{cases}.$$

(i) Esboce o gráfico de f.
(ii) f é derivável em $x=1$? Justifique.
(iii) f é contínua em $x=1$? Justifique.

(3) *(I.86.2.pe)* Seja a função:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & x\leq -1\\ x^2 & -1<x\leq 1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}.$$

(i) Esboce o gráfico de f.
(ii) Calcule, usando a definição, as derivadas laterais de f nos pontos $x=1$ e $x=-1$ e decida se f é ou não diferenciável nestes pontos.

(4) *(I.87.1.pe)* Considere as funções f e g definidas em $[-1,2]$ por:

$$\begin{aligned}f(x)&=\begin{cases}x^2 & \text{se } -1\leq x<1\\ 2-x & \text{se } 1\leq x\leq 2\end{cases} \quad \text{e}\\ g(x)&=\begin{cases}x+1 & \text{se } -1\leq x<0\\ (x-1)^2 & \text{se } 0\leq x\leq 2\end{cases}.\end{aligned}$$

(i) Defina e esboce o gráfico da função composta $h=f\circ g$.
(ii) Estude a continuidade e a diferenciabilidade de $h=f\circ g$ nos pontos $x=0$ e $x=1$.

(5) *(I.87.1.pe)* (i) Sejam f, g e h funções satisfazendo à condição seguinte:

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x) \text{ para todo } x\in\mathbf{R}.$$

Suponha que f e h são deriváveis em x_0 e suponha também que $f(x_0)=h(x_0)$ e $f'(x_0)=h'(x_0)$. Mostre que g é derivável em x_0 e que $f'(x_0)=g'(x_0)$.
(ii) Dê a interpretação geométrica do item anterior.
(iii) Prove que a função F definida por

$$F(x)=\begin{cases}x^{5/3}sen\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

é derivável no ponto $x = 0$. (Utilize o primeiro item desta questão.)

(6) *(I.92.2.pe)* Resolva apenas um dos itens abaixo:
(i) Ache valores para a e b de modo que

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{se } x < 1 \\ a\sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

tenha derivada em $x = 1$. Faça um esboço do gráfico de h.
(ii) Seja h uma função real definida por

$$h(x) = \begin{cases} (2x-4)sen\frac{1}{2x-4} & \text{se } x \neq 2 \\ p & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Calcule o valor de p de modo que h seja contínua em $x = 2$. Mostre que não existe real p tal que h seja derivável em $x = 2$.

(7) *(I.??.?.peo)* Sejam f e g duas funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ satisfazendo as seguintes condições:
(i) $g(x) = xf(x) + 1,$ para todo $x \in \mathbf{R}$.
(ii) $g(a+b) = g(a)g(b),$ para todo $a, b \in \mathbf{R}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
Calcule

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

3. Regras da soma, produto e quociente

3.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.88.2.sc)* Ache as retas tangente e normal a curva

$$y = \frac{x^3 + x}{x - 1} \text{ em } (2, 10).$$

Solução: Para se encontrar as retas tangente e normal à curva em um determinado ponto, temos de achar os seus coeficientes angulares. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pela sua derivada no ponto. Usando a regra do quociente obtemos

$$y' = \frac{(3x^2+1)(x-1) - (x^3+x)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2}.$$

Temos que $y'(2) = 3$ e a reta tangente a curva no ponto $(2, 10)$ é

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - 10 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x + 4.$$

Se m for o coeficiente angular da reta normal a curva no ponto $(2, 10)$ temos que

$$m = -\frac{1}{y'(2)} = -\frac{1}{3}$$

e a reta normal é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 10 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{32}{3}.$$

(2) *(I.92.1.pe)* Encontre as retas tangentes a curva $y = x^3 - 2x^2 + 24x$ que passam pelo ponto $(0,0)$.

Solução: O coeficiente angular da reta tangente a esta curva em um ponto de coordenada $x = t$ é dado por $y'(t)$, onde

$$y'(t) = 3t^2 - 4t + 24.$$

A reta tangente a esta curva no ponto de coordenada $x = t$ é dada por

$$y - y(t) = y'(t)(x - t)$$
$$y - (t^3 - 2t^2 + 24t) = (3t^2 - 4t + 24)(x - t).$$

Esta reta passa pelo ponto $(0,0)$ se somente se

$$0 - (t^3 - 2t^2 + 24t) = (3t^2 - 4t + 24)(0 - t)$$
$$-t^3 + 2t^2 - 24t = -3t^3 + 4t^2 - 24t$$
$$2t^3 - 2t^2 = 0$$
$$2t^2(t - 1) = 0$$
$$t = 0 \text{ ou } t = 1.$$

Para $t = 0$ obtemos a reta

$$y - 0 = 24(x - 0)$$
$$y = 24x.$$

Para $t = 1$ obtemos a reta

$$y - 23 = 23(x - 1)$$
$$y = 23x.$$

(3) *(I.87.1.pe)* Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da curva dada por

$$y = \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Sejam A e B os pontos em que a reta tangente à curva em P intercepta os eixos coordenados Ox e Oy. Calcule a área do triângulo OAB.

Solução: Primeiro iremos encontrar a reta tangente a curva neste ponto. Sua equação é dada por

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Mas $y'(x_0) = -1/x_0^2$ e $y_0 = 1/x_0$. Logo esta reta é

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$
$$x_0^2 y - x_0 = -(x - x_0)$$
$$x_0^2 y + x - 2x_0 = 0.$$

Para encontrar a interseção desta reta com o eixo Ox fazemos $y = 0$

$$x - 2x_0 = 0$$
$$x = 2x_0.$$

O ponto A tem coordenadas $(2x_0, 0)$. Para encontrar a interseção com o eixo Oy fazemos $x = 0$

$$x_0^2 y - 2x_0 = 0$$
$$y = \frac{2x_0}{x_0^2} = \frac{2}{x_0}.$$

O ponto B tem coordenadas $(0, \frac{2}{x_0})$.

Como AOB é um triângulo retângulo com catetos OA e OB temos que sua área é igual a

$$\frac{1}{2}(OA \cdot OB) = \frac{1}{2}\left(2x_0 \cdot \frac{2}{x_0}\right) = 2.$$

3.2. **Problemas propostos.**

(1) *(I.87.1.pe)* Suponha que uma reta r não vertical corta a parábola $y = ax^2 + bx + c$ num único ponto P. Prove que neste ponto P a reta r tem que tangenciar a parábola.

(2) *(I.88.2.pe)* (i) Determine $a > 0$ de modo que a parábola $y = ax^2$ intersepte ortogonalmente a hipérbole $y = \frac{1}{x}$.
(ii) Determine $b > 0$ de modo que a parábola $y = 1 - x^2$ tangencie a hipérbole $y = \frac{b}{x}$.

(3) *(I.90.1.ef)* Determine a, b e c de modo que as curvas $y = x^2 + ax + b$ e $y = ln\ x - c$, se interceptam no ponto $(1, 2)$ e tenham a mesma tangente neste ponto.

(4) *(I.91.1.pe)* Determine as equações das retas que passam pela origem e que cortam o gráfico da função $y = x^3 - 2x$ perpendicularmente.

(5) *(I.92.2.pe)* Encontre as retas tangente e normal à curva

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

no ponto $(0, -1)$.

(6) *(I.92.2.pe)* Ache as tangentes à curva $y = x^3 - x$ que passam pelo ponto $(1, -1)$.

(7) *(I.??.?.peo)* (i) Obtenha as retas tangentes às curvas

$$y = \frac{x+1}{x-1} \text{ e } y = 2x^2 + \frac{x}{2} - 1$$

no ponto $(0, -1)$.
(ii) Mostre que as curvas acima interceptam-se em ângulo reto no ponto $(0, -1)$.

4. Regra da cadeia

4.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.91.2.pe)* Seja $f(x) = (x+1)^2(x-2)$, definida para $x > 1$. Calcule a derivada da função inversa de $f(x)$ no ponto 0.

Solução: Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$. Pela definição da função inversa, temos que

$$g(f(x)) = x$$

e usando a regra da cadeira para derivar esta expressão obtemos

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$
$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2 - 3},$$

pois $f(x) = x^3 - 3x - 2$ e $f'(x) = 3x^2 - 3$. Como queremos encontrar $g'(0)$, devemos encontrar um $x > 1$ tal que $f(x) = 0$. Observe que isto ocorre para $x = 2$. Logo

$$g'(f(2)) = g'(0) = \frac{1}{9}.$$

5. Funções implícitas

5.1. Problemas resolvidos.

(1) *(I.91.2.pe)* Determine a equação da reta normal à curva

$$7y^3x^2 + y^2x^3 - yx^4 - x - 6 = 0$$

no ponto $(1, 1)$.

Solução: Para encontrar a reta normal a curva neste ponto devemos determinar o seu coeficiente angular. Vamos supor que y é função de x numa vizinhança deste ponto e derivar implicitamente

$$7y^3x^2 + y^2x^3 - yx^4 - x - 6 = 0$$

$$7(3y^2y'x^2 + 2xy^3) + 2yy'x^3 + 3x^2y^2 - (y'x^4 + 4x^3y) - 1 = 0.$$

Substituindo $x = 1$ e $y = 1$ nesta equação temos

$$21y' + 14 + 2y' + 3 - y' - 4 - 1 = 0$$

$$22y' + 12 = 0$$

$$y' = -\frac{6}{11},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente a curva neste ponto. Como a reta normal é perpendicular a tangente, temos que seu coeficiente angular é

$$m = -\frac{1}{y'} = \frac{11}{6}$$

e a sua equação é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{11}{6}(x - 1)$$

$$6y - 11x + 5 = 0.$$

(2) *(I.89.1.pe)* Ache as equações das retas tangentes a elipse de equação $5x^2 + 2xy + y^2 = 1$, que são paralelas a reta $x + y - 3 = 0$.

Solução: Primeiro vamos encontrar o coeficiente angular da reta tangengente a esta elipse em um ponto genérico. Vamos supor que y é função de x e derivar implicitamente

$$5x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

$$10x + 2y + 2xy' + 2yy' = 0$$

$$2y'(x + y) = -2(y + 5x)$$

$$y' = -\frac{y + 5x}{x + y} \text{ para } x + y \neq 0.$$

Para que duas retas sejam paralelas, elas têm de ter o mesmo coeficiente angular. Como o coeficiente angular de $x + y - 3 = 0$ é -1, temos de encontrar os pontos de coordenadas (x, y) na elipse onde

$$y' = -\frac{y + 5x}{x + y} = -1$$
$$y + 5x = x + y$$
$$x = 0.$$

Como o ponto (x, y) está na elipse temos que

$$5x^2 + 2xy + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 \text{ e } y = 1 \text{ ou } y = -1.$$

Logo os pontos da elipse onde as retas tangentes são paralelas a $x + y - 3 = 0$ são $(0, 1)$ e $(0, -1)$. No ponto $(0, 1)$ a reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$y + x - 1 = 0.$$

No ponto $(0, -1)$ a reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y + 1 = -1(x - 0)$$
$$y + x + 1 = 0.$$

5.2. **Problemas propostos.**

(1) *(I.83.1.se)* Determine a equação cartesiana da reta tangente à curva $y^3 + x^2y + 2 = 0$ no ponto $(1, -1)$.

(2) *(I.86.1.pe)* Ache as equações das retas tangentes à elípse $3x^2 + 9y^2 = 1$ paralelas à reta $y = x$.

(3) *(I.86.1.scpe)* Encontre a equação da reta normal à curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ no ponto $(2, 1)$.

(4) *(I.86.1.scpe)* Determinar a derivada da função y com relação a variável x, quando

$$y = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

(5) *(I.86.2.pe)* (i) Encontre os pontos onde a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ corta o eixo dos x e mostre que as tangentes à curva nestes pontos são retas paralelas.
(ii) Dê as equações dessas retas tangentes.

(6) *(I.88.2.pe)* Determine as equações das retas tangente e norma à curva $x^4y^3 + x^7 + y^2 = x + 1$ no ponto $(0, 1)$.

(7) *(I.92.1.pe)* Determine a equação da reta normal a curva $x^3y^3 - 3y^2 - 4x - 2y = 0$ no ponto $(0, 0)$.

(8) *(I.92.1.ef)* Calcule a reta tangente a curva $2x^3y - xy^4 - 1 = 0$ no ponto $(1, 1)$.

(9) *(I.92.2.sc)* Mostre que o comprimento do segmento de qualquer reta tangente à curva

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0,$$

compreendido entre os eixos coordenados é igual a a.

6. Funções trigonométicas e suas inversas

6.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.91.1.pe)* Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Mostre que:
(i) f é derivável.
(ii) f' é contínua.
(iii) Não existe $f''(0)$.
Solução: (i) Uma função f é dita derivável quando possui derivada para todo $x \in \mathbf{R}$. Para $x \neq 0$ temos que pela regra do produto

$$f'(x) = \left(x^3\right)' cos\frac{1}{x} + x^3 \left(cos\frac{1}{x}\right)'$$

e pela regra da função composta

$$f'(x) = 3x^2 cos\frac{1}{x} + x^3 \left(-sen\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'$$

e finalmente

$$f'(x) = 3x^2 cos\frac{1}{x} + xsen\frac{1}{x}.$$

Basta checar agora que $f'(0)$ existe. Vamos usar a definição para verificar isto:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 cos\frac{1}{x}.$$

Como $-1 \leq cos\frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando esta desigualdade por x^2 segue que

$$-x^2 \leq x^2 cos\frac{1}{x} \leq x^2$$

e pelo lema do sanduiche

$$\lim_{x\to 0} x^2 cos\frac{1}{x} = 0.$$

Logo $f'(0)$ existe e é igual a 0.

(ii) Para $x \neq 0$ é imediato que f' é contínua neste ponto, pois soma, produto e composição de funções contínuas é contínua. Para $x = 0$ temos de verificar que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|3x^2 cos\frac{1}{x} + xsen\frac{1}{x}\right| \\ &\leq \left|3x^2 cos\frac{1}{x}\right| + \left|xsen\frac{1}{x}\right| \\ &\leq 3|x|^2\left|cos\frac{1}{x}\right| + |x|\left|sen\frac{1}{x}\right| \\ &\leq 3|x|^2 + |x|. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

já que $3|x|^2 + |x| \to 0$ quando $x \to 0$.

(iii) Vamos calcular $f''(0)$ pela definição

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 cos\frac{1}{x} + xsen\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} 3xcos\frac{1}{x} + sen\frac{1}{x}.$$

Como $-3x \leq 3xcos\frac{1}{x} \leq 3x$, pelo lema do sanduiche temos

$$\lim_{x\to 0} 3xcos\frac{1}{x}.$$

Como $\frac{1}{x}$ tende a ∞ quando x tende a 0, segue que $sen\frac{1}{x}$ oscila quando x tende a 0. Logo o limite

$$\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x} = 0.$$

não existe e consequentemente $f''(0)$.

6.2. **Problemas propostos.**

(1) *(I.91.2.pe)* Considere a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{senx}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(i) Verifique, pelo método da razão incremental (i.e. pela definição de derivada) que $f'(0) = 1$.
(ii) Mostre que a função derivada de f é contínua.

Atenção: para o cálculo dos limites acima é melhor usar a regra de L'Hôpital (que só será vista na próxima unidade). Fazer o cálculo do limite diretamente é complexo, pois envolve a manipulação da desigualdade que obtemos quando provamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1.$$

(2) *(I.92.2.ef)* (i) Encontre a reta tangente ao gráfico da curva

$$y = x^4 - 3x^3 + x - 9$$

no ponto $(-1, -6)$.
(ii) Calcule a derivada da função

$$f(x) = cos\left(\frac{x-1}{x^2+x+3}\right).$$

7. Exponenciais e logaritmos

7.1. Problemas resolvidos.

(1) *(I.91.1.pe)* Verifique que o gráfico da função $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação

$$e^{ysenx} + ln(ay + cos^2 x) = 2x + 1,$$

passa pela origem. Determine o valor de a para que a reta tangente a este gráfico na origem seja bissetriz do primeiro quadrante.

Solução: Primeiro vamos verificar que o gráfico desta função passa pela origem, isto é, $0 = f(0)$. Isto é imediato, pois o lado esquerdo da igualdade é igual a $e^0 + ln(cos^2 0) = 1 + 0 = 1$. Temos de encontrar o coeficiente angular da reta tangente, e para isto iremos derivar implicitamente esta equação

$$e^{ysenx} + ln(ay + cos^2 x) = 2x + 1$$

$$e^{ysenx}(y'senx + ycosx) + \frac{ay' - 2cosxsenx}{ay + cos^2 x} = 2.$$

Para $x = 0$ e $y = 0$ temos

$$e^0(0 + 0) + \frac{ay' - 0}{1} = 2$$

$$ay' = 2 \text{ ou } y' = \frac{2}{a}.$$

Para a reta tangente ser a bissetriz do primeiro quadrante, o seu coeficiente angular tem de ser igual a 1 e daí

$$y' = \frac{2}{a} = 1$$

e $a = 2$.

7.2. Problemas propostos.

(1) *(I.86.1.ef)* Ache a reta tangente à curva $log(y^2 + 1) - e^{arctg\ y} = 4^x - 5$ no ponto $(1, 0)$ onde y é uma função de x.

(2) *(I.88.1.pe)* Neste problema, $f(x) = e^x$ e $g(x) = log\ x$, onde log denota o logaritmo neperiano ou natuaral.
(i) Determine o valor de a tal que a reta tangente ao gráfico de f passando por (a, e^a) e a reta tangente ao gráfico de g passando pelo ponto (e^a, a) sejam paralelas.
(ii) Mostre que se $b \neq a$ (a determinado acima), então as retas tangentes nos pontos (b, e^b) e (e^b, b) se encontram sobre a reta $y = x$.
(iii) Faça uma figura e interprete geometricamente o resultado do item anterior.

(3) *(I.90.1.ef)* Determine a, b e c de modo que as curvas $y = x^2 + ax + b$ e $y = ln\ x - c$, se interceptam no ponto $(1, 2)$ e tenham a mesma tangente neste ponto.

(4) *(I.91.1.ef)* Ache a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = 3^{(1-sen\theta)/(1+cos\theta)}$$

no ponto $P = (0, \sqrt{3})$.

8. Exercícios finais sobre regras de derivação

8.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.91.1.pe)* Considere a função

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} + tgx)^{100}(x^{150} + x^{\sqrt{2}x})^{250}(senx + secx)^{500}}{(ln(x^2+1) - \frac{1}{\sqrt{x}})^{14}(arctgx + arcsenx)^{16}}.$$

Calcule a derivada f' num ponto x onde f é derivável.

Sugestão: Use derivação logarítmica.

Observação: Não é preciso simplificar.

Solução: Primeiro vamos explicar o que é derivação logarítmica. Suponha que $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ são funções e que $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são inteiros. Considere a função

$$f(x) = f_1(x)^{n_1} f_2(x)^{n_2} \cdots f_k(x)^{n_k}.$$

Tirando logaritmos de ambos os lados obtemos

$$lnf(x) = n_1 lnf_1(x) + n_2 lnf_2(x) + \cdots + n_k lnf_k(x).$$

Derivando esta expressão obtemos a derivada de f

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = n_1\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + n_2\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + n_k\frac{f_k'(x)}{f_k(x)}$$

$$f'(x) = f(x)\left(n_1\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + n_2\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + n_k\frac{f_k'(x)}{f_k(x)}\right).$$

Vamos aplicar este resultado em nosso caso, onde

$$f(x) = (f_1(x))^{100}(f_2(x))^{250}(f_3(x))^{500}(f_4(x))^{-14}(f_5(x))^{-16}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x} + tgx \\ f_2(x) &= x^{150} + x^{\sqrt{2}x} \\ f_3(x) &= senx + secx \\ f_4(x) &= ln(x^2+1) - \tfrac{1}{\sqrt{x}} \\ f_5(x) &= arctgx + arcsenx. \end{aligned}$$

Neste caso a derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = f(x)\left(100\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + 250\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + 500\frac{f_3'(x)}{f_3(x)} - 14\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} - 16\frac{f_5'(x)}{f_5(x)}\right).$$

Necessitamos apenas calcular as derivadas das $f_i(x)$ e substituir na expressão acima.

(i) Derivada de $f_1(x)$.

Sabemos que as derivadas das funções $\sqrt{x}$ e tgx são respectivamente $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $\sec^2 x$. Como a derivada da soma é a soma das derivadas obtemos que

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sec^2 x.$$

(ii) Derivada de $f_2(x)$.

A derivada de x^{150} é $150x^{149}$. Para encontrarmos a derivada de $x^{\sqrt{2}x}$, usamos sua definição

$$g(x) = x^{\sqrt{2}x} = e^{lnx^{\sqrt{2}x}} = e^{\sqrt{2}xlnx} = e^{h(x)},$$

onde $h(x) = \sqrt{2}xlnx$. Como a derivada de e^x é igual a e^x, usando a regra da cadeia obtemos que

$$g'(x) = e^{h(x)}h'(x) = x^{\sqrt{2}x}h'(x).$$

Mas a derivada de x e lnx são respectivamente 1 e $\frac{1}{x}$ e pela regra do produto temos que

$$h'(x) = \sqrt{2}\,((x)'lnx + x(lnx)') = \sqrt{2}(lnx + 1).$$

Consequentemente

$$g'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}x}(lnx + 1).$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas obtemos

$$f_2'(x) = 150x^{149} + \sqrt{2}x^{\sqrt{2}x}(lnx + 1).$$

(iii) Derivada de $f_3(x)$.

Como as derivadas das funções $senx$ e $secx$ são respectivamente $cosx$ e $secxtgx$ e a derivada da soma é a soma das derivadas, temos que

$$f_3'(x) = cosx + secxtgx.$$

(iv) Derivada de $f_4(x)$.

Pela regra da cadeia temos que a derivada de $ln(x^2 + 1)$ é igual a

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

A derivada de $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ é igual a $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ e daí

$$f_4'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

(v) Derivada de $f_5(x)$.

Como as derivadas de $arctgx$ e $arcsenx$ são respectivamente $\frac{1}{x^2+1}$ e $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ temos que

$$f_5'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora é só subtituir tudo na expressão de $f'(x)$...

8.2. Problemas propostos.

(1) *(I.83.1.se)* Calcule a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = sen[1 + cos^2(2x-1)].$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}.$$

(2) *(I.83.1.se)* Calcule a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = (e^x + tgx)^x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$g(x) = log[1 + sen^2(1 + x^2)],\ x \in \mathbf{R}.$$

(3) *(I.83.1.se)* Seja $f(x) = arcsen(x^2 - \frac{1}{2})$.
(i) Determine o domínio de definição de $f(x)$.
(ii) Calcule $f'(x)$.

(4) *(I.86.1.pe)* Calcule a derivada das funções abaixo: (não precisa simplificar)

$$f(x) = arctg(\sqrt{1-x^2}).$$

$$g(x) = sen\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

$$h(x) = x^3cos^3(sen\ x).$$

(5) *(I.86.2.pe)* (i) É dada uma função $g(x) = arctan(f(\log x))$, sabendo-se que f é uma função diferenciável tal que $f'(0) = f(0) = 1$. Calcule $g'(1)$.

(ii) Derive:

$$f(x) = sen^3(\sqrt{tan^2+2}).$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^4}.$$

(6) *(I.87.1.pe)* Calcule a derivada das funções

$$f(x) = arccosx - arctg\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ -1 < x < 1, x \neq 0.$$

$$g(x) = \frac{senx}{2^{2x}} + ln(2+e^{-x}),\ x \in \mathbf{R}.$$

(7) *(I.87.1.pe)* Calcule a derivada de:

$$f(x) = arcsen(cos\ x),\ 0 < x < \pi.$$

$$g(x) = \frac{lnx}{e^{2x}\sqrt{x}},\ x > 0.$$

(8) *(I.87.2.ef)* Use as regras de derivação que você conhece para achar $f'(x)$ se:

$$f(x) = (senx)^{1/senx} + log(2^x + tan(1-x^2)) + arctg\sqrt{1-x^2}.$$

(9) *(I.88.1.pe)* (i) Calcule:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{log(1+sen^2x)}{1+cos^2x}.$$

(ii) Calcule:

$$\frac{d}{dx}\ arctg\ e^{\sqrt{x}}.$$

(10) *(I.88.2.pe)* Calcule

$$\frac{d}{dx}exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ x \neq 1.$$

$$\frac{d}{dx}[cos(\sqrt{x}+lnx)]^2,\ x > 0.$$

(11) *(I.89.1.pe)* Calcule a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = (x^2+x-1)cos\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right).$$

$$g(x) = x^{\sqrt[3]{x}} + arctg(log(x^2+1)),\ x > 0.$$

(Lembre-se que $\log x$ é o logaritmo neperiano.)

(12) *(I.89.2.ef)* Derivar a seguinte função:
$$f(x) = \frac{senx + tgx}{1+\sqrt{x}} + 2^{arcsenx}.$$

(13) *(I.92.1.pe)* Derive as seguintes funções:
$$f(x) = arctg\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
$$g(x) = (x+e^{-x})^2 cos5x.$$

(14) *(I.92.2.pe)*Calcule a derivada das seguintes funções:
$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}+x)(x^3-3x^2+9)}{x^2+1};$$
$$g(x) = sen^2(2x+1) + tg^2(x^3+cosx).$$

(15) *(I.??.?.peo)* Use as regras de derivação que você conhece para obter $f'(x)$ sabendo que:
$$f(x) = (1+cosx)^{secx} + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}.$$

(16) *(I.??.?.??)* Derivar a seguinte função:
$$f(x) = x^{arcsenx} + \frac{1+cosx}{1-senx}.$$

9. Taxas de variação

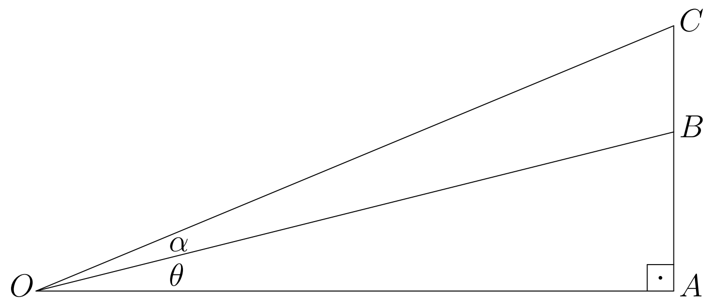
9.1. **Problemas resolvidos.**

(1) *(I.86.1.ef)* A altura h e o raio r da base de um cone circular reto estão variando a uma taxa constante de $2m/s$ e $1m/s$ respectivamente. A que taxa estará variando o volume do cone no instante em que $h = 1m$ e $r = 1m$.
Solução: Se V for o volume do cone circular reto, então
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$
Como r e h são funçoes do tempo temos que
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right).$$
Como $\frac{dr}{dt} = 1m/s$ e $\frac{dh}{dt} = 2m/s$, quando $r = 1m$ e $h = 1m$, temos
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3}m^3/s.$$

(2) *(I.86.2.pe)* Um ponto do primeiro quadrante move-se sobre a parábola $y = x^2$ de maneira que se distancia da origem a $3mm/seg$. A que taxa estão variando as suas coordenadas no instante em que tem abscissa $2mm$?
Solução: Suponha que no instante t as coordenadas deste ponto sejam $(x(t), y(t))$. Como este ponto move-se sobre a parábola $y = x^2$ temos que
$$y(t) = x(t)^2.$$
Se $D(t)$ é a distância deste ponto até a origem no instante t temos que
$$D'(t) = 3mm/seg.$$

Mas
$$D(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{y(t) + y(t)^2},$$
pois o ponto está sobre a parábola. Logo pela regra da cadeia
$$D'(t) = \frac{y'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{y(t) + y(t)^2}}.$$
Para $x(t) = 2mm$ temos $y(t) = 4mm$ e daí
$$3 = \frac{y'(t) + 8y'(t)}{2\sqrt{4 + 16}} = \frac{9y'(t)}{4\sqrt{5}}$$
$$y'(t) = \frac{4\sqrt{5}}{3} mm/seg \text{ e}$$
$$y'(t) = 2x(t)x'(t)$$
$$\frac{4\sqrt{5}}{3} = 4x'(t) \text{ e daí}$$
$$x'(t) = \frac{\sqrt{5}}{3} mm/seg.$$

(3) *(I.88.1.pe)* Considere a figura:



Sabe-se que o ponto A está fixo e os pontos B e C movem-se de tal modo que o ângulo α é constante e igual a $\frac{\pi}{6}$, e o ângulo θ tem taxa de variação constante e igual a $0,1$ radiano por segundo. A distância de O a A é 1 metro. Calcule a taxa de variação da distância de B a C quando $\theta = \frac{\pi}{6}$. (Note que C e B pertencem a reta perpendicular a OA.)

Solução: Observe que
$$tg\theta = \frac{AB}{OA} = AB \text{ e}$$
$$tg(\theta + \alpha) = \frac{AC}{OA} = AC.$$
Logo
$$\theta = arctg(AB) \text{ e}$$
$$\theta + \alpha = arctg(AC);$$
$$\theta = arctg x \text{ e}$$
$$\theta + \alpha = arctg(x + y).$$
Como θ, x e y variam com relação ao tempo temos
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + x^2}\frac{dx}{dt} \text{ e}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+(x+y)^2}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right).$$

Como α é constante, temos que

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Quando $\theta = \frac{\pi}{6}$, temos que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}m$ e $x + y = \sqrt{3}m$ e daí

$$0,1 = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\frac{dx}{dt} \text{ e}$$

$$0,1 + 0 = \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right).$$

Logo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{30}m/s \text{ e}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{4}{10}m/s;$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{30}m/s = \frac{4}{15}m/s,$$

que é a variaçao da distância entre B e C (que é igual a y) com relação ao tempo, quando $\theta = \frac{\pi}{6}$.

9.2. **Problemas propostos.**

(1) *(I.86.1.scpe)* Óleo está sendo despejado no interior de um tanque em forma de cone invertido, a taxa de $3\pi m^3/min$. Se o tanque tem raio $2.5m$ no topo e profundidade $10m$, com que velocidade varia a profundidade do óleo quando atinge $8m$.

(2) *(I.87.1.pe)* Calcule $x'(t_0)$ e $y'(t_0)$ onde $x(t)$ e $y(t)$ são as coordenadas de um ponto que se desloca sobre a curva dada por $y^2 - x^2 = 5, y > 0$, sabendo-se que $x(t_0) = 2$ e que a taxa de variação do quadrado da distância de $(x(t), y(t))$ à origem é constante e igual a 2.

(3) *(I.89.1.pe)* Um tanque horizontal tem $32m$ de comprimento e suas extremidades têm a forma de trapézios isósceles com $8m$ de altura, base menor igual a $8m$ e base maior igual a $12m$. A água está sendo despejada no tanque à taxa de $20m^3/min$, com que velocidade está subindo o nível da água quando a água estiver a $4m$ do fundo?

(4) *(I.91.2.pe)* Resolva apenas uma das seguintes questões:
(i) Se uma bolinha de naftalina evapora-se a uma taxa proporcional à área de sua superfície, mostre que o seu raio decresce a uma taxa constante.
(ii) Despeja-se areia sobre um monte em forma de cone à taxa constante de $1,4m^3/min$. As forças de atrito na areia são tais que a altura do monte é sempre igual ao raio de sua base. Com que velocidade a altura do monte aumenta quando ele tem $1,5m$ de altura.

(5) *(I.91.2.ef)* Um balão sobe verticalmente com velocidade v e um observador, a certa distância x, vê o balão sob um ângulo de elevação θ. Ache a taxa de variação $\frac{d\theta}{dt}$ em termos de v, θ e x.

(6) *(I.??.?.se)* O volume de um dado balão esférico cresce à taxa constante de $100cm^3/seg$. Ache a velocidade com que o raio aumenta quando ele é igual a $5cm$.

Lista complementar de exercícios da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos