CÁLCULO L1 — NOTAS DA VIGÉSIMA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, consideraremos mais uma técnica de integração, que é conhecida como substituição trigonométrica. Esta técnica pode ser empregada para eliminar raízes quadradas de polinômios de grau 2.

1. Usando a identidade fundamental entre o seno e o cosseno

Sabemos que, para todo número real θ,

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Multiplicando esta identidade por a^2, para um número real positivo a, obtemos que

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2 - a^2 \cos^2 \theta$$

Extraindo a raiz quadrada desta identidade, chegamos a

$$a|\operatorname{sen} \theta| = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

Caso $0 \leq \theta \leq \pi$, temos que $\operatorname{sen} \theta$ não é negativo e conseqüentemente esta relação pode ser reescrita como

$$a \operatorname{sen} \theta = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{1}$$

Portanto, a seguinte mudança de variável

$$X = a \cos \theta \qquad \text{com} \qquad dX = -a \operatorname{sen} \theta d\theta \tag{2}$$

transforma, por (1), $\sqrt{a^2 - X^2}$ em $a \operatorname{sen} \theta$, elimiando a raiz quadrada.

Exemplo 1. *Calcule a seguinte integral*

$$\int X^2 \sqrt{4 - X^2} dX$$

Vamos fazer $X = 2 \cos \theta$ e daí $dX = -2 \operatorname{sen} \theta d\theta$. Logo

$$\begin{aligned} \int X^2 \sqrt{4 - X^2} dX &= \int 4 \cos^2 \theta \sqrt{4(1 - \cos^2 \theta)} (-2 \operatorname{sen} \theta d\theta) \\ &= \int 4 \cos^2 \theta (2 \operatorname{sen} \theta)(-2 \operatorname{sen} \theta d\theta) \\ &= -16 \int \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

A última integral já foi calculada na décima oitava aula. Vimos que

$$\int \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{32} + C$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Portanto,

$$\int X^2\sqrt{4-X^2}dX = -2\theta + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{2} + C \tag{3}$$

Necessitamos retornar a variável original. Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(4\theta) &= 2\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta)\\ &= 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)\\ &= \frac{[2\cos\theta][(2\cos\theta)^2 - 2][2\operatorname{sen}\theta]}{2}\\ &= \frac{X(X^2-2)\sqrt{4-X^2}}{2}\end{aligned}$$

Substituindo em (3), temos que

$$\int X^2\sqrt{4-X^2}dX = -2\arccos\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{X(X^2-2)\sqrt{4-X^2}}{4} + C$$

A próxima integral, que é semelhante a anterior, pode ser calculada de maneira análoga. Contudo, pode ser resolvida de forma mais simples com uma outra mudança de variável.

Exemplo 2. *Calcule a seguinte integral*

$$\int X^3\sqrt{1-X^2}dX$$

Neste caso, considere $Y = 1 - X^2$ e daí $dY = -2XdX$. Portanto,

$$\int X^3\sqrt{1-X^2}dX = \int X^2\sqrt{1-X^2}XdX = \int (1-Y)\sqrt{Y}\frac{dY}{-2} = -\frac{1}{2}\int (1-Y)\sqrt{Y}dY$$

Note que

$$\int (1-Y)\sqrt{Y}dY = \int (1-Y)Y^{\frac{1}{2}}dY = \int Y^{\frac{1}{2}} - Y^{\frac{3}{2}}dY = \frac{2Y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2Y^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Conseqüentemente

$$\int X^3\sqrt{1-X^2}dX = -\frac{1}{2}\left(\frac{2Y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2Y^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + C = \frac{Y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{Y^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Retornando a variável original, chegamos a

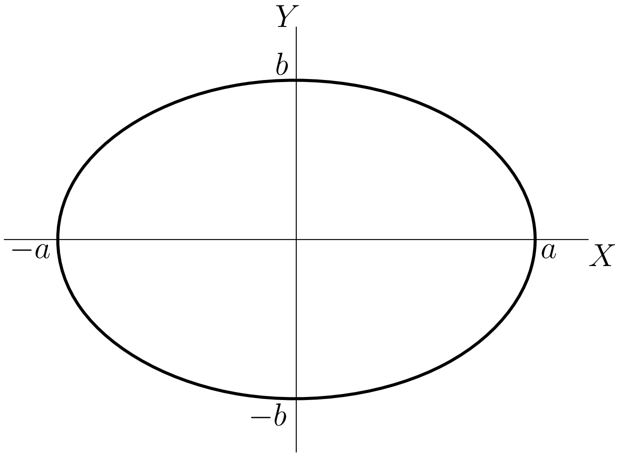
$$\int X^3\sqrt{1-X^2}dX = \frac{(1-X^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1-X^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Finalizamos esta parte da aula determinando a área A da região que é interior a uma elipse possuindo eixos medindo $2a$ e $2b$.

Ao colocarmos eixos coordenados no plano de forma que o das abscissas contenha o eixo da elipse de comprimento $2a$ e o das ordenadas o de comprimento $2b$, a equação desta elipse será

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

Veja a figura a seguir.



Podemos reescrever (4) como

$$Y = \pm b\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}$$

Portanto, esta elipse é a união dos gráficos de duas funções dadas pelas expressões

$$f_+(X) = b\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}} \qquad \text{e} \qquad f_-(X) = -b\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}$$

O gráfico de $f_+(X)$ coincide com a parte da elipse contida no semi-plano superior e o gráfico de $f_-(X)$ é a interseção da elipse com o semi-plano inferior. Como a elipse é simétrica com relação ao eixo das abscissas e a área da região que é interior a elipse e está contida no semi-plano superior é dada pela integral

$$\int_{-a}^{a} f_+(X)dX = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}dX = b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}dX$$

temos que a área interior a esta elipse é dada por

$$A = 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}dX$$

Vamos fazer a seguinte substituição trigonométrica para calcular esta integral $X = a\cos\theta$ e daí $dX = -a\operatorname{sen}\theta d\theta$. Observe que

$$\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}} = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = |\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta$$

desde que θ pertença ao intervalo $[0, \pi]$, por exemplo. Note que, quando $X = -a$, temos $\theta = \pi$ e que, quando $X = a$, temos $\theta = 0$. Logo, após esta mudança de variável, chegamos a

$$A = 2b\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}\theta(-a\operatorname{sen}\theta d\theta) = -2ab\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

Usando a identidade trigonométrica para $\operatorname{sen}^2\theta$ em termos do $\cos(2\theta)$, temos que

$$\begin{aligned} A &= -2ab\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}d\theta = -ab\int_{\pi}^{0} 1 - \cos(2\theta)d\theta \\ &= -ab\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = -ab(0 - \pi) = \pi ab \end{aligned}$$

Conseqüentemente a área da região que é interior a uma elipse tendo eixos medindo $2a$ e $2b$ é igual a πab.

2. Usando as outras identidades fundamentais

Para todo número real θ, a seguinte relação é verificada:

$$\sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + 1$$

Multiplicando esta identidade pelo quadrado de um número positivo a, temos que

$$a^2\sec^2\theta = a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2$$

Ao extrairmos a raiz quadrada em ambos os lados, chegamos a

$$a|\sec\theta| = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2}$$

Quando $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que $\sec\theta > 0$ e daí

$$a\sec\theta = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2} \tag{5}$$

Conseqüentemente, a segunte mudança de variável

$$X = a\operatorname{tg}\theta \qquad \text{com} \qquad dX = a\sec^2\theta d\theta$$

transforma $\sqrt{X^2+a^2}$ em $a\sec\theta$.

Exemplo 3. *Calcule a seguinte integral*

$$\int\sqrt{X^2+X+1}dX$$

Antes de fazer uma substituição trigonométricas, vamos simplificar o polinômio de grau dois que está no interior da raiz quadrada completando os quadrados e mudando sua variável. Temos que

$$X^2+X+1 = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Se $Y = X + \frac{1}{2}$, então $dY = dX$ e daí

$$\int\sqrt{X^2+X+1}dX = \int\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}dY$$

Se $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta$, então $\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta$ e $dY = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta d\theta$. Logo

$$\int\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}dY = \int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta d\theta\right) = \frac{3}{4}\int\sec^3\theta d\theta \tag{6}$$

Agora passamos a calcular a integral do cubo da secante. Faremos utilizando a técnica de integração por partes:

$$\int\sec^3\theta d\theta = \int\sec^2\theta\sec\theta d\theta = \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\theta\sec\theta)d\theta$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta d\theta &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int \operatorname{tg}^2\theta\sec\theta d\theta\\ &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta d\theta\\ &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \left(\int\sec^3\theta d\theta - \int\sec\theta d\theta\right)\end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned}2\int \sec^3\theta d\theta &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta + \int\sec\theta d\theta\\ &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta + \int\frac{\sec\theta(\operatorname{tg}\theta+\sec\theta)}{\operatorname{tg}\theta+\sec\theta}d\theta\\ &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta + \int\frac{\sec^2\theta+\operatorname{tg}\theta\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta+\sec\theta}d\theta\\ &= \operatorname{tg}\theta\sec\theta + \ln|\operatorname{tg}\theta+\sec\theta| + C\end{aligned}$$

Substituindo o valor desta integral em (6), temos que

$$\int\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}dY = \frac{3}{8}\left(\operatorname{tg}\theta\sec\theta + \ln|\operatorname{tg}\theta+\sec\theta|\right) + C$$

Substituindo o valor de $\operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta$ em função de Y, temos que

$$\int\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}dY = \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}Y\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}} + \ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\left(Y+\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}\right)\right|\right) + C$$

Esta identidade pode ser reescrita como

$$\int\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}dY = \frac{1}{2}Y\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{8}\ln\left|Y+\sqrt{Y^2+\frac{3}{4}}\right| + C$$

Voltando a variável X, temos que

$$\int\sqrt{X^2+X+1}dX = \frac{1}{4}(2X+1)\sqrt{X^2+X+1} + \frac{3}{8}\ln\left|X+\frac{1}{2}+\sqrt{X^2+X+1}\right| + C$$

A última substituição trigonométrica serve para eliminar uma raiz quadrada do tipo

$$\sqrt{X^2-a^2}$$

Neste caso, pode-se fazer $X = a\sec\theta$. Deixamos para o leitor a tarefa de verificar os detalhes desta transformação.

Exercício 4. *Calcule as seguintes integrais:*

(i)

$$\int\sqrt{4-X^2}dX$$

(ii)

$$\int_0^3\frac{X^2}{\sqrt{9-X^2}}dX$$

(iii)
$$\int X\sqrt{2X^2-5}dX$$

(iv)
$$\int \sqrt{4X-X^2}dX$$

(v)
$$\int X^2\sqrt{4+9X^2}dX$$

Conteúdo da vigésima aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Industrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos