UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2023.1

17 de Janeiro de 2023

1. (2,5) Assinale V (VERDADEIRO) ou F (FALSO). **Se VERDADEIRO, apresente uma demonstração, se FALSO, apresente um contraexemplo ou justifique por que é falso.**

   ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então o mesmo acontece com $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n$.

   ( ) Se E e F são subconjuntos de $\mathbb{R}$, então $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

   ( ) Se E e F são subconjuntos de $\mathbb{R}$, então $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$.

   ( ) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua periódica (isto é, existe algum $C > 0$ tal que $f(x+C) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), então f é limitada.

   ( ) Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma contração se existe uma constante $c \in [0, 1)$ tal que $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ para todos x, $y \in I$. A função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ é uma contração.

2. (1,0) Supondo que $a, b \ge 0$, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

3. (2,5)

   (i) Defina o supremo de um subconjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$.

   (ii) Demonstre que toda sequência monótona limitada de número reais é convergente.

   (iii) Considere a sequência (a_n) de números reais definida por

   $$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

   Demonstre que (a_n) é convergente.

4. (1,5) Seja $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função diferenciável tal que $f \circ f = \mathrm{id}$, mas que $f \neq \mathrm{id}$ (aqui, id denota a função identidade). Mostre que existe $c \in (0, \infty)$ tal que $f'(c) = -1$. Dê um exemplo de uma função que satisfaz esta propriedade.

5. (1,0) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) \cdot x = 0$, então a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(2x) - f(x)$ é limitada.

6. (1,5) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada Riemann-integrável. Demonstre que

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) x^n \, \mathrm{d}x = 0.$$