UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2023.1

17 de Janeiro de 2023

1. (3,0) Assinale V (VERDADEIRO) ou F (FALSO). **Se VERDADEIRO, apresente uma demonstração, se FALSO, apresente um contraexemplo ou justifique por que é falso.**

   ( ) A esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| = 1\}$ é um conjunto compacto.

   ( ) Toda sequência de pontos em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é convergente.

   ( ) Se E e F são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, então $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$.

   ( ) Se E e F são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, então $\overline{E \times F} = \overline{E} \times \overline{F}$.

   ( ) Se B é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $A = \partial B$, então A tem interior vazio.

   ( ) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação contínua e $B \subset \mathbb{R}^m$ é uma bola aberta, então $f(B)$ é um conjunto aberto.

2. (1,5) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Demonstre que a função $g(x) = \max\{f(x,y)\,;\, y \in [0,1]\}$ está bem definida (isto é, o máximo existe) e é contínua.

3. (1,5) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $u \in S^{n-1}$, prove que existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

4. (1,5)

   a) Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa.

   b) Dê um exemplo de um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que não é injetivo.

5. (1,5)

   a) Enuncie o Teorema da Função Implícita.

   b) Mostre que a equação
   $$x^2 y + \mathrm{e}^x + z = 0$$
   define x implicitamente como uma função de y e z numa vizinhança V do ponto $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$, isto é, existe uma função diferenciável $g : V \to \mathbb{R}$ tal que $g(1,-1) = 0$ e $g(y,z)^2 y + \mathrm{e}^{g(y,z)} + z = 0$, para todo $(y,z) \in V$. Encontre as derivadas $\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)$ e $\frac{\partial g}{\partial z}(1,-1)$.

6. (1,0) Sejam $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ e $f, g \in C^2(\Omega)$ tais que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} = 0$. Defina $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Mostre que
   $$\int_\Omega [f(x,y)\Delta g(x,y) - g(x,y)\Delta f(x,y)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$