Influência do material manipulável no desenvolvimento do raciocínio combinatório – Intervenção no 3° ano do Ensino Fundamental

Águida Barbosa dos Santos[1]
Adryanne Maria Rodrigues Barreto de Assis[2]

RESUMO

O presente estudo teve como principal objetivo verificar a influência do material manipulável no desenvolvimento do raciocínio combinatório em uma turma do 3º ano do Ensino Fundamental. Os alunos foram divididos em dois grupos, Grupo A e Grupo B, no qual ambos trabalharam com o material manipulável, contudo, de formas diferentes, sendo o Grupo A com material para todas as possibilidades e o Grupo B com materiais suficientes para resolver apenas algumas possibilidades. Os alunos passaram por um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste, sendo o pós-teste a única etapa em que os alunos não tiveram o material manipulável disponível. Os resultados mostram que ambos os grupos apresentaram avanços menores do que o esperado. Sendo assim, verificamos que o recurso em questão neste momento e desta forma como ele foi organizado não influenciou no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavra-chave: Combinatória; Ensino Fundamental; Material Manipulável.

Introdução

A Combinatória, de acordo com Pessoa e Borba (2009), é um dos tópicos da área Matemática responsável pela identificação da quantidade de possibilidades de combinações, a partir de um grupo dado, sem a necessidade de contá-los um a um. Estando esta relacionada ao raciocínio multiplicativo.

Apesar de documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN´s (Brasil, 1997), orientarem o trabalho com a Combinatória

---

[1] Concluinte de Pedagogia – Centro de Educação – UFPE. aguida.santos7@gmail.com
[2] Professora Substituta do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino – Centro de Educação – UFPE. adryanne@gmail.com

desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, e alguns livros didáticos, como apresentado Barreto, Amaral e Borba (2007) e Assis e Magalhães (2012) , apresentarem tais problemas de modo diversificado, sabemos que problemas de raciocínio combinatório é formalmente introduzido durante a escolarização apenas no 2° ano do Ensino Médio, como destacado por Pessoa e Borba (2009) e Lima (2015). Porém, acreditamos que a restrição de problemas que envolvem a ideia de Combinatória apenas no Ensino Médio dificulta muito a compreensão do aluno acerca da temática, uma vez que os alunos não terão tido a oportunidade de ter um trabalho prévio com as situações combinatórias, impedindo-os de elaborarem uma aprendizagem mais significativa.

Entretanto, a Combinatória é um conteúdo essencial ao desenvolvimento do raciocínio lógico, que permiti aos alunos uma maior capacidade de abstração e compreensão de contextos matemáticos inseridos em sua realidade, como, por exemplo, ao escolher roupas, sapatos e acessórios ao sair de casa; e, ainda, verificar quais as possibilidades do seu time favorito chegar em primeiro e segundo lugar em um campeonato. Santos, Matias e Pessoa (2011) em seu estudo ressaltam a importância e a possibilidade desse trabalho contextualizado com alunos da Educação Infantil e, para isso, o material manipulável é verificado pelas autoras como um recurso viável nestas situações.

Florencio e Guimarães (2017) em seu estudo investigaram o papel do material manipulável na resolução de problemas de Produto Cartesiano na Educação Infantil, comparando o desempenho dos resultados das crianças que utilizaram materiais manipuláveis e as que utilizaram apenas lápis e papel, como resultado deste estudo vimos que a maioria das crianças buscavam utilizar uma vez cada elemento e não percebia a necessidade de combinar todos os acessórios com todos os palhaços, já as crianças que utilizavam o material, a maioria, buscavam distribuir os acessórios para todos os palhaços de forma igualitária, preocupando-se com a utilização do material.

Na mesma perspectiva, Pessoas e Santos (2015) também se propuseram a averiguar a influência do material manipulável na compreensão dos problemas combinatórios, como resultado deste estudo notamos que ambos os grupos (GMM E GLP) apresentaram avanços importantes, entretanto o grupo que fez uso do material (GMM) não apresentou o resultado esperado, quando comparado com o grupo que utilizou apenas lápis e papel (GLP).

Diante disso, buscaremos desenvolver um trabalho com alunos do 3° ano do Ensino Fundamental a fim de verificar a influência do material manipulável na compreensão do raciocínio combinatório e, ainda, verificar se tais alunos, com o auxílio desse recurso, conseguem construir a ideia de generalização.

Dessa forma, nos tópicos seguintes apresentamos a teoria dos campos conceituais a partir da concepção de Vergnaud (1996), buscando oferecer bases para a compreensão da construção do conceito. Além disso, abordaremos como Vergnaud, (1983, 1991, 1996) Nunes e Bryant (1997) e ainda os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) classificam os problemas encontrados dentro do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Logo após, faremos uma abordagem sobre a disposição dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório a partir da organização feita por Pessoa e Borba (2009). Em seguida, faremos uma breve apresentação sobre materiais manipuláveis, discutindo o que alguns autores entendem como materiais manipuláveis, dentre eles destacamos: Matos e Serrazina (1996), Reys (1996), Brito e Bellemain (2008) e Lorenzato (2006).

Teoria dos Campos Conceituais

De acordo com Assis (2014) a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1996) tem como base a Teoria de Piaget, entretanto, o autor adota como referência o conhecimento do conteúdo específico, de modo que estuda as estruturas mentais utilizadas pelas crianças no processo de desenvolvimento do conhecimento, compreendendo o conhecimento tanto como o saber-fazer quanto como os saberes expressos. Nesta teoria desenvolvida por Vergnaud (1996) para que um conceito adquira sentido, é necessário que venha através de distintas situações e problemas a resolver.

Nesta perspectiva, Vergnaud (1986) acredita que um conceito é desenvolvido quando está inserido em um campo de conceitos, o qual é formado por diferentes conceitos, esquemas e representações simbólicas fortemente relacionadas, sendo este um tripé, o qual Vergnaud (1996) entende ser composto da seguinte forma: as *situações* que dão sentido ao conceito, diferentes *invariantes*, que são as propriedades lógico-matemáticas, e as *representações simbólicas*, sendo estas um conjunto de símbolos usados para representar um determinado conceito.

Dessa forma, para o autor supracitado, é necessário apoiar-se nessas três dimensões ao mesmo tempo para que se possa estudar profundamente o desenvolvimento de um conceito.

Sendo assim, para que um conceito seja desenvolvido, é necessária uma estreita relação com outros conceitos, uma vez que as características presentes em um conceito podem estar agregadas a outros conceitos, seja por meio das diferentes *situações* ou *representações simbólicas*.

Estruturas Multiplicativas

De acordo com Vergnaud (1996), o campo conceitual que envolve as estruturas multiplicativas insere relações que envolvem as ideias de multiplicações e divisões, sendo estas um conjunto de *situações*, nas quais as resoluções são feitas com uma ou mais multiplicações ou divisões.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN´s – (BRASIL, 1997) apontam os conteúdos sugestivos às estruturas multiplicativas para serem trabalhados na escola a partir do 2° ciclo do Ensino Fundamental. Todavia, essas estruturas, de acordo com Assis (2014), em sua maioria, são apresentadas nos livros didáticos e colocadas nas escolas como um seguimento da adição, sendo este um equívoco, pois, de acordo com Nunes e Bryant (1997), tais estruturas possuem bases conceituais distintas, logo, o cálculo relacional, que são as propriedades cognitivas utilizadas para resolver uma situação, dessas duas situações (adição e multiplicação) são distintas, mesmo o cálculo numérico podendo ser semelhante. Como dito acima, cálculo relacional, para Vergnaud (1991), está relacionado ao raciocínio necessário para compreender determinadas situações, já os cálculos numéricos são os cálculos e operações numéricas realizadas para resolverem o problema proposto.

Nas *situações* propostas dentro das estruturas multiplicativas, diferentes autores estudaram estas distintas *situações*, a fim de perceberem suas semelhanças e diferenças. Apresentaremos, então, a seguir, as classificações das *situações* que abrangem o campo das estruturas multiplicativas, a partir das concepções descritas pelos seguintes autores: Vergnaud (1983, 1991, 1996); Nunes e Bryant (1997); e os PCN's (Brasil, 1997)

De acordo com Pessoa (2009), Vergnaud (1983, 1991) apresenta três classes de problemas multiplicativos, porém iremos descrever aqui apenas duas dessas classes, as quais envolvem relações ternária e quaternária, sendo elas:

Produto de medidas: problemas com três variáveis, cuja uma das variáveis é um produto das outras duas.

Isomorfismo de medidas: problemas com quatro variáveis, no qual duas são de um tipo e duas de outro tipo.

Ambas as classificações (produto de medidas e isomorfismo de medidas) envolvem problemas de multiplicação e divisão, entretanto, apenas no isomorfismo de medidas possui a subclassificação em dois grupos (partição e quotição) referentes aos problemas de divisão.

Partição: Apresentam um conjunto maior e um número de parte no qual o conjunto será dividido.

Quotição: Apresentam um conjunto maior e o número das quotas no qual o conjunto deverá ser dividido.

A seguir, no Quadro 01, apresentamos exemplos de situações-problemas que envolvem essas relações organizadas por Vergnaud.

Quadro 01: Exemplos das *situações* de Produto de Medidas e Isomorfismo de Medidas

	Produto de Medidas	**Isomorfismo de Medidas**
Multiplicação	Derek tem 4 meias e 3 sapatos. De quantas formas ele poderá usá-los, combinando todos os sapatos com todas as meias?	Izie comprou 3 caixas de chocolate. Em cada caixa contém 12 bombons. Quantos bombons Izie comprou?
Divisão	Com suas calças e blusas, Cristina consegue fazer 10 combinações, sabendo que Cristina tem 5 calças. Quantas blusas ela possui?	**Partição** Elis comprou 3 bonecas para sua filha Meredith, que lhes custaram R$ 60,00. Quanto Elis pagou em cada boneca? **Quotição** Alex tem R$ 50,00 e quer comprar carinhos que custam R$ 10,00 cada um. Quantos carrinhos ele pode comprar?

As classificações das estruturas multiplicativas de acordo com Nunes e Bryant (1997) apresentam diferentes níveis dentro da categorização reunida por eles.

Correspondência um-a-muitos: referente aos problemas que envolvem a ideia de proporcionalidades. Este nível se subdivide em problemas de: Multiplicação, Inverso de multiplicação e Produto Cartesiano.
Relação entre variáveis: relação entre duas ou mais variáveis.
Distribuição: conhecida também como a divisão por partição.

No Quadro 02 explicitamos exemplos das situações apresentadas por Nunes e Bryant (1997).

Quadro 02: Exemplos das *situações* de Correspondência um-a-muitos, Relação entre variáveis e Distribuição

Correspondência um-a-muitos	**Relação entre variáveis**	**Distribuição**

Multiplicação Uma aranha tem 8 patas. Quantas patas teremos com 3 aranhas? **Inverso de multiplicação** Derek comprou algumas bonecas para suas irmãs. Sabendo que Derek quer dar 2 bonecas para cada irmã, e ele tem 4 irmãs, quantas bonecas ele comprou? **Produto Cartesiano** Para dançar quadrilha temos 3 meninas e 4 meninos. Quantos casais podem ser formados se todos os meninos dançarem com todas as meninas?	George comprou um pacote de pirulitos por R$ 5,00. Quanto ele pagaria ao comprar 3 pacotes de pirulitos?	Miranda tem 10 picolés e quer distribuir para seus 5 amigos. Quantos picolés cada amigo de Miranda irá ganhar?

Assim com os autores acima apresentados, os PCN's (BRASIL, 1997) também apresentam categorias para os problemas de estruturas multiplicativas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais distinguem os problemas em quatro tipos:

Comparativa: no qual compara as quantidades apresentada nos problemas.

Proporcionalidade: associa a ideia de proporção entre as variáveis.

Configuração retangular: problemas que apresentam situações de distribuição espacial.

Combinatória: problemas que envolvam a ideia do raciocínio combinatório.

Em seguida, no Quadro 03, foram organizados exemplos da categorização feita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997).

Quadro 03: Exemplos das *situações* Comparativa, Proporcionalidade, Configuração retangular e Combinatória

Comparativa	**Proporcionalidade**	**Configuração retangular**	**Combinatória**

Zola tem 3 bonecas e Sofia tem o dobro. Quantas bonecas Sofia tem?	Amélia irá distribuir 30 convites para sua festa, cada convite possui 3 senhas. Quantas senhas Amélia irá distribuir?	O prédio onde Richard mora possui 5 apartamentos em cada andar. Sabendo que seu prédio foi construído com 12 andares, quantos apartamentos tem o prédio?	Rose tem 3 saias e 2 blusas. Para ir a uma festa, de quantas formas diferentes ela poderá se vestir, se combinar todas suas saias e blusas?

Nota-se, então, como destacado por Pessoa (2009) e Assis (2014), que as classificações acima mencionadas apresentam semelhanças e diferenças entre elas, de modo que a principal diferenciação entre as mesmas está na denominação dos problemas para cada autor.

A seguir, no próximo tópico, faremos uma abordagem sobre a organização dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, estando estes problemas dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas e apresentados na categorização de todos os autores supracitados.

Combinatória

A Combinatória, de acordo com Pessoa e Borba (2009) e Merayo (2001), é um dos tópicos da área Matemática responsável pela identificação das possibilidades de combinações, a partir de um grupo dado, sem a necessidade de contá-los um a um, ou seja, sem precisar listar todos os elementos de um determinado conjunto; estando esta relacionada ao raciocínio multiplicativo.

Sendo assim, em consonância com tais autores, consideramos a Combinatória como um tipo de pensamento que exige contagem, mas que vai além da ideia de enumeração de elementos de determinados conjuntos.

A Combinatória, como pertencente ao grupo de problemas de estruturas multiplicativas, é classificada de modo diferente por alguns autores, apesar da maioria se relacionarem. Ainda que com a denominação das *situações* diferenciadas, os autores, como Vergnaud (1983,1991); Nunes e Bryant (1997); e os PCN's (1997), como visto no tópico anterior, apresentam classificações relacionadas ao mesmo tipo de raciocínio.

De acordo com Florêncio e Guimarães (2017), a Combinatória é a parte da Matemática que estuda e analisa agrupamentos seguindo alguns critérios, envolvendo diferentes *situações* (tipos de problemas). Para Pessoa e Borba (2009), a Combinatória é composta por quatro tipos de problemas distintos, tendo sido um destes destacados nos estudos apresentados anteriormente, de Vergnaud (1983 e 1991), Nunes e Bryant (1997) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), que aqui chamaremos por *produto cartesiano*, e na classificação disposta por Merayo (2001): *permutação*, *arranjo* e *combinação*. A seguir, iremos diferenciar os diferentes problemas combinatórios organizados por Pessoa e Borba (2009) por meio de seus *invariantes* (relações e propriedades constantes).

Produto Cartesiano: Dado dois ou mais conjuntos distinto, forma-se um novo conjunto, através da combinação dos mesmos; e a ordem dos elementos pode ou não gerar novas possibilidades.

Permutação: Todos os elementos de um dado conjunto serão usados, (cada um apenas uma vez); e a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Arranjo: Com um número X de elementos, organizado em um único conjunto, formam-se agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos ou N elementos... Sendo $0 < N < X$ (N e X números naturais); e a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Combinação: Com um número X de elementos, forma-se agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos ou N elementos... Sendo $0 < N < X$ (N e X números naturais); e a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Para Vergnaud (1986), um conceito deve ser trabalhado em um largo espaço de tempo, dando a oportunidade uma apreensão completa do mesmo. Desse modo, Pessoa e Borba (2009) defendem que a Combinatória deve ser trabalhada com todas as *situações* dos problemas combinatórios de forma paralela desde os anos iniciais da escolarização, de modo que possibilite ao aluno a compreender as diferentes *situações*, bem como seus *invariantes* e as possibilidades de *representações*.

Diante disso, sabendo da complexidade e importância desse conteúdo, principalmente para as crianças dos anos inicias, muitos recursos surgiram a fim de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dele, como os softwares e o material manipulável. Dessa forma, faremos uma breve apresentação acerca do que alguns autores entendem por materiais manipuláveis, abordando, também, alguns estudos que envolvem tal recurso e o ensino da Combinatória.

Materiais Manipuláveis

Matos e Serrazina (1996), como destacado por Pessoas e Santos (2015), afirmam que material manipulável é todo objeto que o aluno é capaz de sentir e movimentar, sendo esses objetos reais do nosso cotidiano ou que são usados para representar uma ideia. Em consonância com esta ideia, para Reys (1996), materiais manipuláveis são os objetos reais que tem aplicação no nosso cotidiano ou simplesmente objetos utilizados para representar uma ideia. Ou seja, material manipulável para tais autores é um instrumento/objeto qualquer que o aluno seja capaz de movimentar, sentir, tocar e/ou manipular com o objetivo de representar uma ideia.

Logo, entendemos por materiais manipuláveis objetos lúdicos que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem das crianças, pois as motivam a realizarem atividades, contribuindo, assim, para a construção de determinado conceitos. De acordo com Brito e Bellemain (2008), o uso do material manipulável permite a ampliação das estratégias de resolução de problemas, o que não é possível com lápis e papel.

Segundo Lorenzato (2006), os materiais apresentam funções diversas, a depender do objetivo para qual está sendo utilizado, entretanto, de acordo com Matos e Serrazina (1996), apenas a manipulação do material não garante uma aprendizagem significativa, é preciso a intervenção do professor.

Ananiais e Pessoa (2014) seguem esta mesma linha de pensamento ao defender que o mais importante são as ações e reflexões sobre estas estratégias, pois, assim com afirmam Brito e Bellemain (2008), nem sempre o material torna a situação didática mais significativa. Já os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1997), nesta mesma ideia, defendem que os materiais manipuláveis têm um papel importante no ensino e na aprendizagem, desde que a situação didática à qual os materiais estão inseridos provoque uma reflexão, e que tal recurso traga sentido para o aluno.

Diante das possibilidades que o material manipulável tem durante o processo de ensino e aprendizagem, alguns estudos se propuseram a estudar a relação desse recurso e a Matemática, especificamente, com o conteúdo da Combinatória, como por exemplo, o estudo apresentado por Pessoa e Santos (2015), o qual busca verificar e comparar a influência dos materiais manipuláveis no desempenho de alunos que utilizaram este recurso com o desempenho de alunos que utilizaram apenas lápis e papel; sendo esta pesquisa desenvolvida em duas turmas do 5° ano de uma escola Municipal do Recife. Para as autoras, os resultados indicam que o grupo que utilizou apenas o lápis e papel alcançou melhores resultados do que o grupo que utilizou o material manipulável. No entanto, acreditamos que tal recurso pode não ter sido atrativo para a faixa etária pesquisada, fazendo com que tais alunos não obtivessem um melhor desempenho.

Ananiais e Pessoa (2014) realizaram um estudo no qual buscava analisar o uso do material manipulável e do cálculo mental na resolução de problemas de multiplicação por crianças dos 3° ano do Ensino Fundamental. Como método da pesquisa, tiveram a participação de 15 crianças escolhidas pelo professor da turma e dividida em 3 grupos com 5 crianças. O Grupo 1 recebeu lápis e papel, o Grupo 2 não recebeu nada e o Grupo 3 recebeu fichas. Todos os alunos participaram de uma entrevista (individual) no qual responderam a quatro questões referentes a problemas multiplicativos. Os dados foram analisados de acordo com os tipos de materiais utilizados e os tipos de problemas. Referente ao tipo de materiais utilizados, observou-se um aspecto bastante positivo do uso das fichas que proporcionou maior quantidade de acertos, seguido do grupo que utilizou lápis e papel, o grupo que utilizou o cálculo mental foi o que menos apresentou resposta corretas. Tal resultado nos faz pensar na hipótese de que o uso de algum suporte, seja material manipulável ou lápis e papel, auxilia a criança na resolução de problemas.

No artigo apresentado por Florêncio e Guimarães (2017), cujo principal objetivo foi investigar o papel do material manipulável na resolução do produto cartesiano com alunos da Educação Infantil, tiveram 32 participantes, sendo todas crianças do Grupo V de duas escolas municipais do Recife, onde metade das crianças de ambas as escolas utilizaram materiais manipuláveis e a outra metade utilizaram lápis e papel. Neste estudo foi possível observar que a maioria das crianças consegue compreender a lógica multiplicativa, contudo, cada *situação* levou as crianças a diferentes tipos de estratégias para a resolução. De acordo com as autoras, as crianças que utilizaram lápis e papel preocupavam-se com a repetição, fazendo com que as mesmas não esgotassem todas as possibilidades, enquanto que as crianças que utilizaram materiais manipuláveis não apresentavam essa preocupação e acabavam por repetir algumas possibilidades, porém, ter o material em mãos permitiu que mais distribuições fossem feitas.

Acreditamos que o material manipulável é importante, uma vez que pode vir a auxiliar numa melhora de compreensão de conceitos pelos alunos dos anos iniciais da escolarização, podendo contribuir significativamente. Contudo, os docentes precisam estar atentos ao seu uso. Destacamos ainda que a utilização desses materiais pode permitir ao aluno um maior envolvimento com a sua própria aprendizagem, estimulando o desenvolvimento de diversas capacidades, de modo a facilitar a compreensão de conceitos e das ideias matemáticas.

Metodologia

O presente estudo foi desenvolvido em uma turma do 3° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Jaboatão dos Guararapes.

Os alunos de uma única turma foram divididos em dois grupos, grupo A (com 13 alunos) e grupo B (com 11 alunos). O grupo A desenvolveu um trabalho com materiais manipuláveis que extrapolam a quantia necessária para a resposta correta dos problemas combinatórios propostos, enquanto o grupo B recebeu materiais manipuláveis suficientes para solucionar apenas algumas das possibilidades, com o intuito de trabalhar o desenvolvimento da generalização.

Os materiais manipuláveis foram organizados por fichas com imagens dos elementos dos enunciados das questões, de modo que fosse possível a manipulação.

Dessa forma, tivemos como objetivo comparar o desempenho dos alunos do grupo A e do grupo B ao resolverem problemas combinatórios a partir de materiais manipuláveis, bem como verificar a influência desses materiais na construção da ideia de generalização.

Em ambos os grupos foram realizado um pré-teste contendo oito (8) questões, sendo duas de cada tipo de problema: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Para o pré-teste foram disponibilizados os materiais manipuláveis de cada questão. Contudo, os alunos poderiam utilizá-los ou não.

Em seguida, foi realizada uma intervenção com cada um dos grupos de modo semelhante, diferenciando apenas da utilização dos materiais manipuláveis, onde o grupo A utilizou materiais suficientes para solucionarem todas as possibilidades, enquanto o grupo B utilizou material manipulável suficiente para solucionar apenas algumas das possibilidades. Salientamos que as intervenções ocorreram separadamente e em ambas foram apresentadas os tipos de problemas combinatórios e seus respectivos invariantes.

Na sequência, foi realizado um pós-teste com ambos os grupos (Grupo A e B) no qual os alunos responderam oito questões de problemas combinatórios, também sendo dois de cada tipo, assim como no pré-teste. Nesta etapa, os alunos resolveram a atividade fazendo uso apenas do lápis e do papel.

Análise dos Resultados

Como dito anteriormente, foram aplicadas duas atividades com os alunos de uma turma de 3° do Ensino Fundamental de uma escola pública. Entre uma atividade e outra, os alunos tiveram um momento de intervenção, o qual constava a explicação acerca dos diferentes tipos de problemas combinatórios, seus invariantes e a organização para uma possível generalização.

Os alunos foram divididos em dois grupos, tendo o Grupo A alunos que utilizaram, na primeira atividade (pré-teste) e na intervenção, materiais manipuláveis suficientes para listar todas as possibilidades, e o Grupo B alunos que também utilizaram deste recurso, contudo, com menos peças.

Diante disso, analisaremos a seguir como tais alunos dos dois grupos, se saíram antes, durante e após o momento de intervenção, averiguando seus desempenhos nestas etapas, além de verificar se o recurso utilizado auxiliou no desenvolvimento do processo de aprendizagem.

Por erros, acertos e estratégias

Buscaremos fazer uma análise mais detalhada das formas de resoluções encontradas, buscando comparar, não só a quantidade de acertos, mas a qualidade das respostas em relação aos problemas combinatórios.

Assim, apresentaremos a seguir os Gráficos 1 e 2, que contêm os quantitativos referentes aos acertos parciais, totais e erros dos alunos do Grupo A no pré-teste e pós-teste, de modo que seja possível perceber o desenvolvimento dos alunos entre a atividade inicial e atividade final.

Gráfico 1: Resultados dos alunos do Grupo A no pré-teste

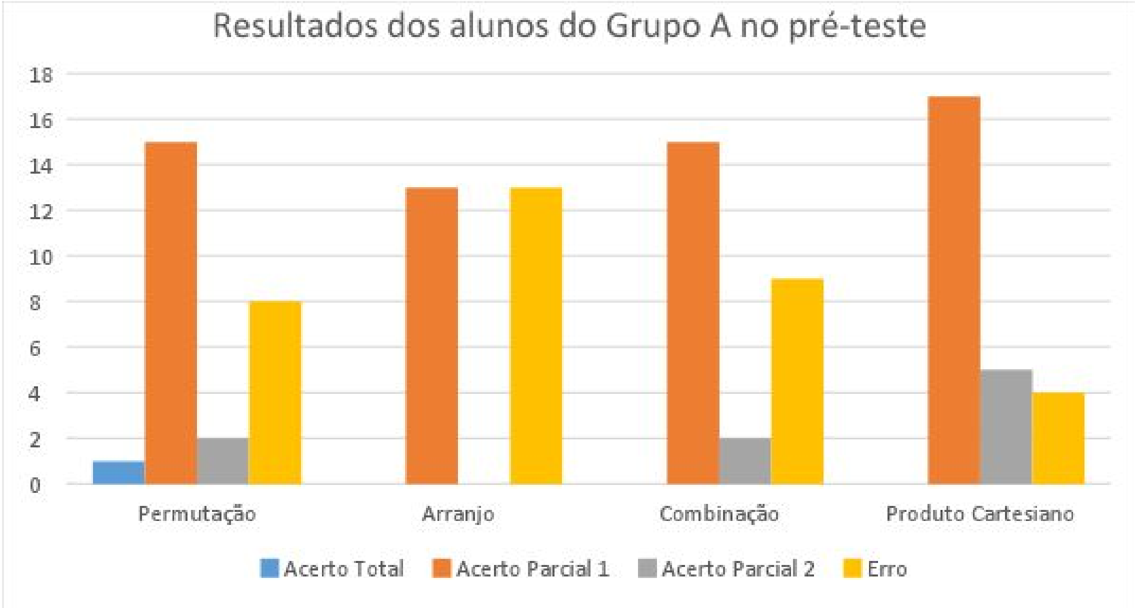
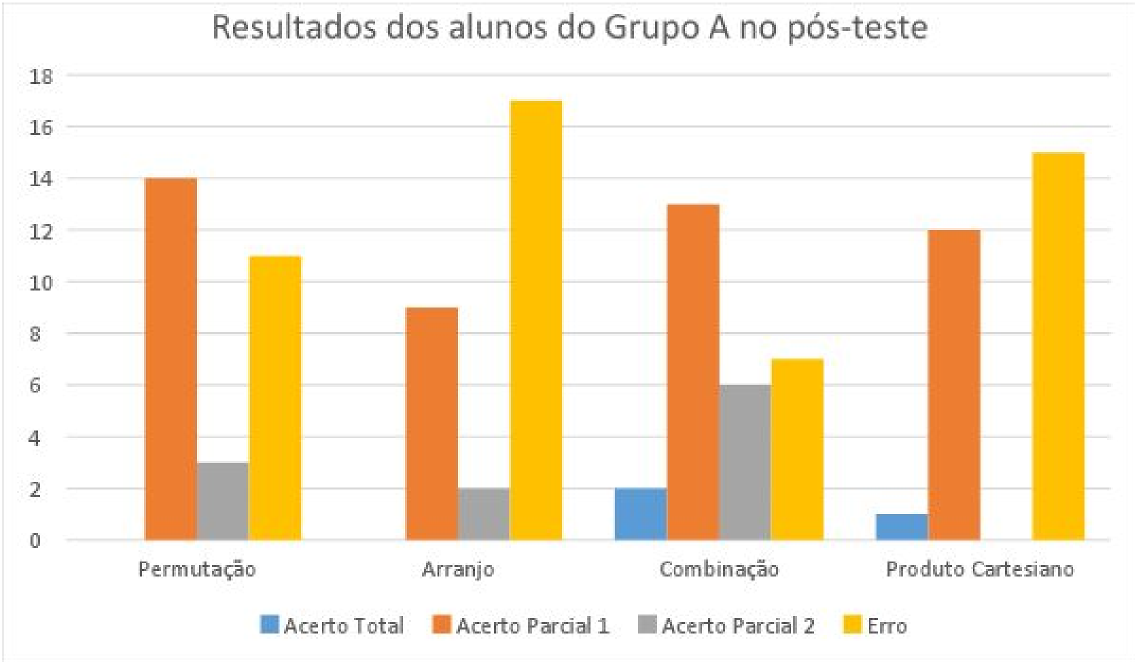


Gráfico 2: Resultados dos alunos do Grupo A no pós-teste



Com bases nos Gráficos acima, verificamos que os alunos do Grupo A, no pré-teste, apenas um obteve acerto total, sendo este em um problema de permutação. É possível constatar também a grande quantidade de acertos parciais 1, sendo estes considerados quando os alunos listavam de uma até quase metade das possibilidades. Percebemos, ainda, que os acertos parciais 1 não tiveram grande variação de um tipo de problema para outro, e foram estes os que mais prevaleceram. Chamamos atenção para a resolução dos problemas de produto cartesiano, nos quais os alunos tiveram maior quantidade de acertos do tipo 2 e menos quantidade de erros. De acordo com Pessoa e Borba (2009) os problemas que envolvem este tipo de raciocínio são os que os alunos encontram maior facilidade para resolverem, isso deve-se ao fato de que este tipo de problema é mais comum de ser trabalhado nas séries iniciais.

Ao verificar os dados encontrados no pós-teste, percebemos ainda a baixa quantidade de acertos totais, contudo, o que nos chama atenção é, apesar de terem sido apenas três os acertos totais, os mesmos ocorreram nos problemas de combinação e produto cartesiano, problema este que teve, também uma das maiores quantidades de acertos parciais, tanto do tipo 1 como do tipo 2 e, ainda, a menor quantidade de erros.

Dessa forma, a partir dos dados acima apresentados nos Gráficos 1 e 2, notamos a baixa quantidade de acertos totais dos alunos, havendo apenas um acerto total em um problema de permutação no pré-teste e três acertos totais no pós-teste sendo dois problemas de combinação e um problema de produto cartesiano.

Sendo assim, nos leva a perceber que os alunos sujeitos da pesquisa não apresentam uma compreensão suficientemente elaborada acerca da Combinatória, no que se refere aos acertos totais dos problemas, mesmo após a intervenção.

Ao compararmos os resultados do pré e pós-teste, nos deparamos com um resultado muito menor do que o pensado após a intervenção do Grupo A, assim como o estudo realizado por Pessoa e Santos (2015), que envolvia o trabalho também com materiais manipuláveis e não obtiveram o resultado esperado. Entretanto, apesar de no pós-teste a quantidade de erros ter sido maior quantitativamente, os acertos parciais do tipo 2 tiveram uma pequena elevação.

Diante disto, buscaremos entender as estratégias utilizada pelos alunos nas respostas apresentadas com o intuito de verificar se houve uma melhoria na qualidade das respostas dos mesmos, apesar de não apresentarem o esgotamento das possibilidades.

Assim como foi visto anteriormente, os alunos não apresentaram avanços em relação ao pré-teste e pós-teste. Entretanto, apesar de não terem esgotado todas as possibilidades e alcançado o acerto total, alguns alunos apresentaram estratégias que podemos considerar como possível entendimento ao raciocínio combinatório.

A seguir, iremos fazer uma abordagem das respostas de alguns alunos do Grupo A buscando verificar a compreensão da Combinatória por parte destes alunos, bem como discutir sua estratégia de resolução no pré-teste e pós-teste.

Figura 1: Resolução do problema de Permutação pelo aluno 6 do grupo A no pré-teste.

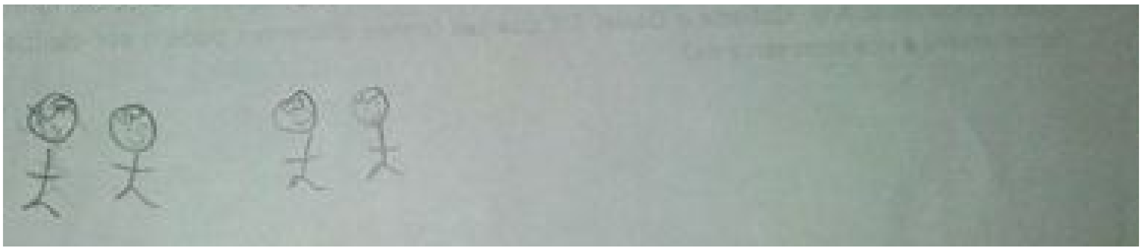
Em sua festa de aniversário Sophia quer tirar uma foto com suas duas amigas (Emile e Grazielle) de modo que as três fiquem lado a lado. De quantas formas diferentes podemos ter a fotografia?

O aluno 6 apresenta uma resposta no qual consideramos como erro, de modo que o aluno não faz relação com uma resposta correta, uma vez que o mesmo não compreende que todos os elementos do conjunto deveriam ser utilizados ao mesmo tempo. Sendo assim, o mesmo não compreende o invariante do problema proposto, que se refere à ideia de que todos os elementos do conjunto em questão serão usados ao mesmo tempo e a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Está mesma aluna, no pós teste, percebe a necessidade de utilizar todos os elementos para cada possibilidade listada, sendo assim, consideramos um avanço importante em relação ao pré-teste.

A seguir, na Figura 2, apresentamos a resolução do problema de arranjo da Aluna 7 no pós-teste.

Figura 2: Resolução do problema de Arranjo pela aluna 7 do grupo A no pós-teste.



Um bingo entre quatro amigos (Paulo, João, Roberto e Mário) terá como prêmio para o 1º lugar uma viagem e para o 2º lugar uma bicicleta. Quais as formas diferentes de serem premiados o 1º e 2º lugar?

A aluna em questão apresenta uma resposta que se enquadra na categoria de acertos parciais do tipo 1, e, apesar de não esgotar as possibilidades, fica visível a percepção de que não só existe uma possibilidade. Chamamos atenção para a estratégia do desenho utilizada pela aluna, que, segundo Pessoa e Borba (2013), é uma estratégia bastante utilizada e válida por alunos no processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Adiante, serão apresentadas as resoluções dos problemas de combinação pela aluna 1 no pré-teste.

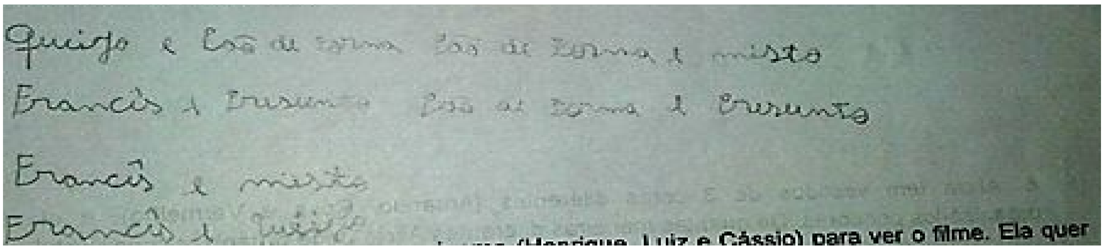
Figura 3: Resolução do problema de Combinação pela aluna 1 do grupo A no pré-teste.

Pedro, Victor e Miguel estão participando de um sorteio de duas bicicletas iguais, sabendo que cada um só pode ser sorteado uma vez. De quantas maneiras diferentes podemos ter os dois sorteados para ganharem a bicicleta?

A Aluna 1 apresenta um resultado totalmente inadequado para o problema, no pré-teste, por meio de uma operação, pois a conta feita pela aluna não é um método eficaz para encontrar a solução para o problema. A aluna apresenta uma resposta que não estabelece relação com os invariantes da situação de combinação, que aponta que de um conjunto maior, são retirados elementos para formar um conjunto menor e a ordem na qual os elementos são apresentados não irá gerar novas possibilidades. Já no pós-teste, a aluna apresenta um acerto parcial do tipo 1 fazendo relação com a resposta correta, listando uma das possibilidades existentes.

Na Figura 4 encontra-se o exemplo de resolução apresentado pela aluna 9 do Grupo A para o problema de produto cartesiano.

Figura 4: Resolução do problema de Produto Cartesiano pela aluna 9 do grupo A no pós-teste.



Numa lanchonete o cliente faz seu próprio sanduíche, podendo escolher entre dois tipos de pães (Francês e de forma) e três tipos de recheios (queijo, presunto e misto). De quantas formas diferentes posso fazer meu sanduíche, escolhendo um pão e um recheio?

No pós-teste a Aluna 9 apresenta uma resolução de forma sistemática e conseguiu chegar ao acerto total utilizando como estratégia a listagem, que, como citado por Pessoa (2009), é a estratégia mais utilizada pelos alunos ao resolverem problemas combinatórios.

A seguir, apresentaremos os Quadros 3 e 4 com os resultados obtidos pelos alunos do Grupo B no pré e pós-teste, grupo este que desenvolveu um trabalho com fichas suficientes apenas para solucionar algumas das possibilidades, com intuito de perceber o auxílio destas fichas no processo de generalização em problemas combinatórios.

Gráfico 3: Resultados dos alunos do grupo B no pré-teste

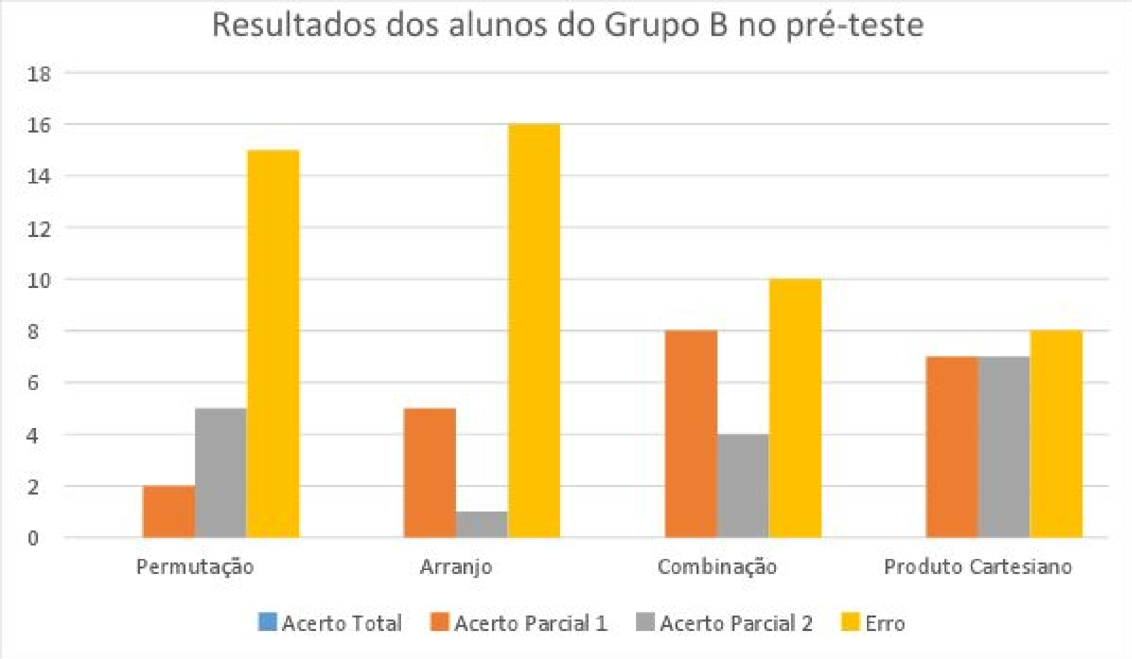
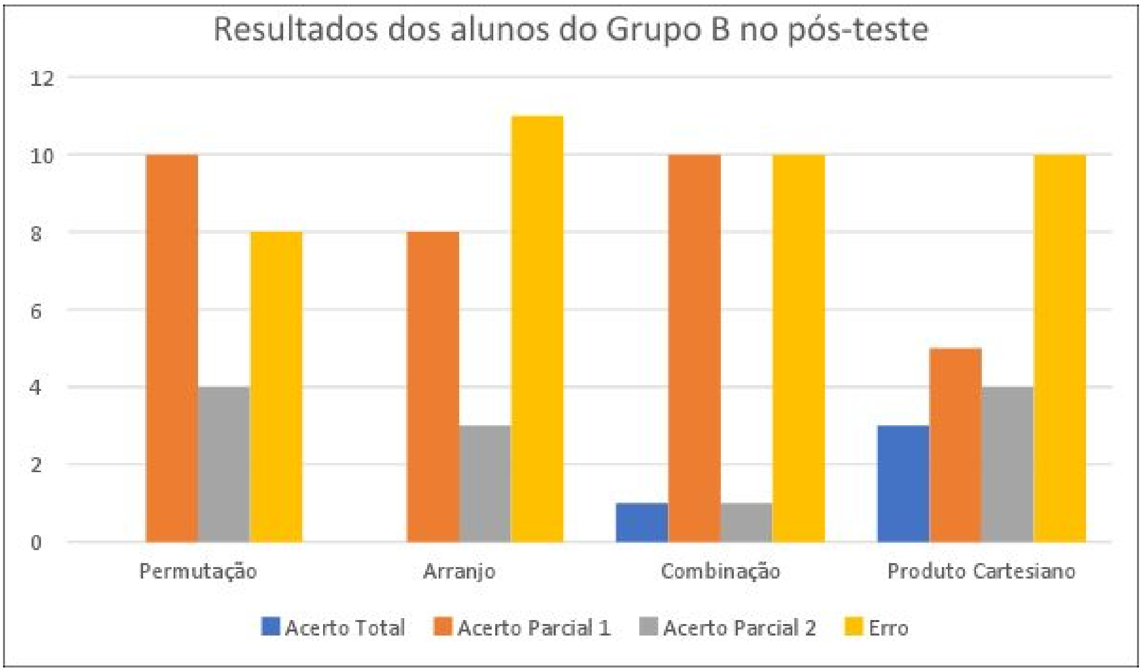


Gráfico 4: Resultados dos alunos do grupo B no pós-teste



Percebemos, de acordo com os dados apresentados no Gráfico 3, uma quantidade grande de erros, sendo 49 questões erradas, das quais destaca-se uma maior dificuldade nos problemas envolvendo permutação e arranjo. Podemos constatar, ainda, que os alunos trabalharam com ficham que não davam o total de possibilidades para resolver o problema, não tiveram nenhum acerto total e, com relação aos acertos parcial tipo 1, houve também uma diferença grande em relação aos alunos do Grupo A, contudo, já em relação aos acertos parciais do tipo 2, os alunos pesquisados apresentaram maior variedade quanto ao outro grupo de alunos.

Ao observar os dados apresentados nos Gráficos 3 e 4, é possível notar que houve avanços em relação aos acertos totais dos alunos entre o pré-teste e pós-teste, apesar de terem sido avanços mínimos. O Grupo B aumentou de 0 acertos totais para 4 acertos totais, sendo três acertos nos problemas de produto cartesiano e um acerto em combinação. Acreditamos que os problemas mais comuns, como é o caso do produto cartesiano, ou seja, encontrados com maior facilidade nos livros didáticos, os alunos apresentam menor dificuldade em solucionar, assim como visto no trabalho por (PESSOA e SANTOS, 2012) que dizem que problemas menos comuns, ou seja, que são trabalhados com menor frequência nas salas de aula dos anos iniciais, e com maior número de possibilidades é mais difícil de generalizar e esgotar as possibilidades.

Os acertos parciais do tipo 1 também apresentaram um aumento mínimo, passando de 22 para 33, enquanto que os acertos parciais do tipo 2 reduziram de 17 para 12, assim como a quantidade de erros que passaram de 49 para 39.

É importante salientar que este grupo desenvolveu um trabalho utilizando materiais manipuláveis insuficientes para esgotar todas as possibilidades, a fim de perceber a influência deste material para a generalização. Contudo, percebemos que a falta de material gerava um pouco de confusão entre os alunos, de modo que não contribuiu na organização da ideia de generalização embutida durante a resolução dos problemas combinatórios.

Quando comparamos os resultados entre o Grupo A e o Grupo B, no que se refere aos acertos totais, percebemos que o grupo B apresentou mais avanços do que o grupo A, apesar de considerarmos estes avanços como mínimos. Acreditamos que tal situação ocorreu devido a necessidade que o grupo B tinha de utilizar lápis e papel nos processos anteriores ao pós-teste, ou seja, na intervenção devido a falta de material manipulável.

Seguiremos fazendo a abordagem das respostas dos alunos do Grupo B, com intuito de verificar suas estratégias para solucionar as questões propostas.

No que se refere ao problema de permutação do grupo B, apresentaremos como exemplo a resolução da Aluna 6. Vejamos sua resposta no pós-teste.

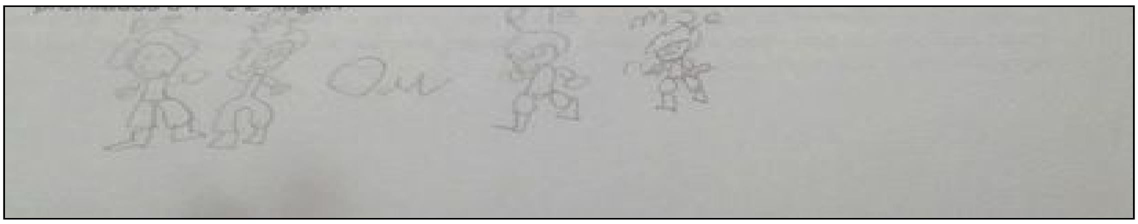
Figura 5: Resolução do problema de Permutação da aluna 6 do Grupo B no pós-teste

Paula levou seus três filhos ao cinema (Henrique, Luiz e Cássio) para ver o filme. Ela que seus três filhos sentados lado a lado. De quantas formas eles podem se organizarem?

No pós-teste a aluna apresenta uma resposta no qual consideramos parcial do tipo 2, pois a aluna consegue identificar metade das possibilidades para solucionar a questão, apresentando a listagem como estratégia de resolução, sendo esta uma forma sistemática de resolução.

Na figura 6, trouxemos o exemplo do aluno 5 para o problema de arranjo.

Figura 6: Resolução do problema de Arranjo pelo aluno 5 do grupo B no pós-teste.

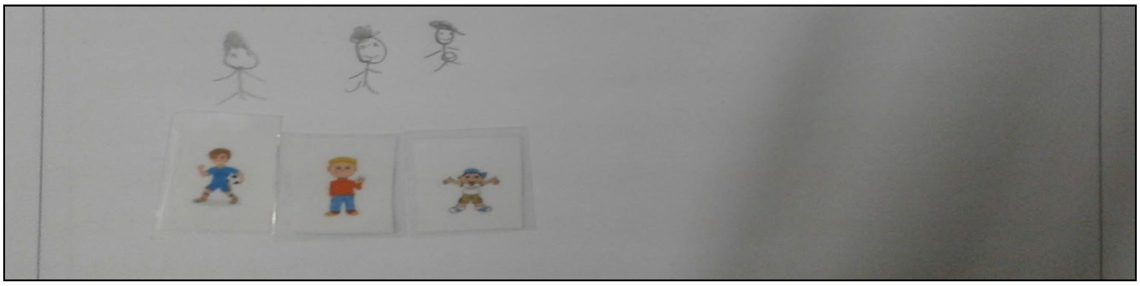


Um bingo entre quatro amigos (Paulo, João, Roberto e Mário) terá como prêmio para o 1° lugar uma viagem e para o 2° uma bicicleta. Quais as formas diferentes de serem premiado 1° e 2° lugar?

Nota-se que, no pós-teste, o aluno consegue identificar o invariante da questão, no qual de um dado conjunto os elementos são agrupados em 1, 2 ou N elementos, e a ordem gera novas possibilidades. Consideramos a resposta deste aluno como acerto parcial do tipo 1, pois o mesmo consegue mostrar duas possibilidades distinta através do desenho.

Para o problema de Combinação temos o exemplo do aluno 10.

Figura 7: Resolução do problema de Arranjo pelo aluno 10 do grupo B no pré-teste.

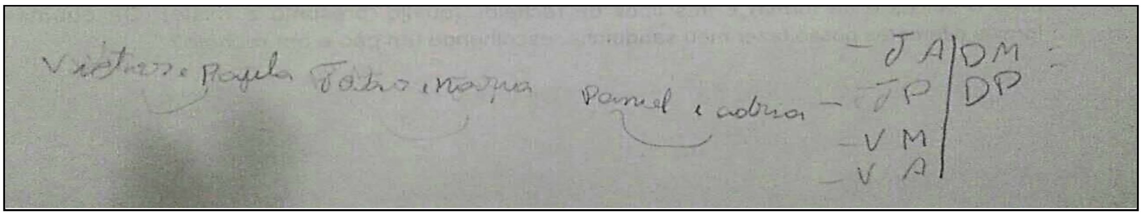


Pietro, Victor e Miguel estão participando de um sorteio de duas bicicletas iguais, de modo que cada um só pode ser sorteado uma vez. De quantas maneiras diferentes podemos ter os dois sorteados para ganharem bicicleta?

O aluno faz a reprodução dos desenhos das fichas, sem fazer relação com a resposta correta, nem mesmo com alguma das possibilidades. Logo, a resposta está categorizada como erro. Chamamos atenção para o fato de que, apesar de ter o auxílio das fichas, o aluno opta por fazer uso dos desenhos, de modo que o mesmo faz a reprodução das fichas. Salientamos que tal aluno utiliza desta mesma estratégia no pós-teste (desenho) e, assim como o Aluno 5, passa a compreender o invariante da questão desenhado uma das possibilidades, no pós-teste.

Na figura 8 apresentamos o exemplo do Aluno 4 relacionado ao problema de produto cartesiano.

Figura 8: Resolução do problema de Produto Cartesiano pelo aluno 4 do grupo B no pós-teste.



A professora do 3° ano irá escolher um menino (João, Vitor e Daniel) e uma menina (Paula, Adriana e

Maria) para formar uma dupla para ser representante da turma. De quantas formas diferentes ela pode ter os representantes, sendo um menino e uma menina?

O aluno apresenta acerto total da questão, utilizando a listagem como estratégia. Ora utilizando da escrita dos nomes, ora utilizando apenas as primeiras letras para identificar as duplas, e, mesmo utilizando a listagem de duas maneiras diferentes, o aluno consegue chegar ao acerto total da questão.

Os dados acima apresentados nos mostram que ambos os grupos apresentaram avanços menores do que o esperado, entretanto, podemos concluir que os alunos, de forma individual, apresentaram avanços importantes, mesmo que pequenos.

Alguns estudos anteriores, como dito anteriormente, pesquisaram também sobre o uso do material manipulável na resolução de problemas combinatórios. Pessoa e Santos (2015) buscou investigar o uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas combinatórios, mas em uma turma do 5° do Ensino Fundamental,mostrou que o grupo que utilizou materiais manipuláveis não apresentou o resultado esperado, porém foi perceptível alguns avanços. E o trabalho por Rodrigues e Guimarães (2017) que teve como o objetivo de investigar o uso destes materiais na resolução de produto cartesiano na Educação Infantil mostrou que as crianças que utilizaram o material buscavam distribuir os acessórios de forma igualitária para todos os palhaços do enunciado.

De um modo geral, o estudo atual nos leva a refletir que os materiais manipuláveis não são suficientes, sendo trabalhados de maneira isolada, no auxílio da compreensão da Combinatória, seja o material trabalhado com todas as possibilidades disponíveis ou faltando algumas possíveis respostas no material disponibilizado, que nos leva a concluir que somente o material manipulável não assegura a aprendizagem das crianças, tornando necessária a intervenção do professor no desenvolvimento do raciocínio combinatório pois, bem mais importantes que o recurso utilizado, é que os alunos compreendam os invariantes de cada tipo de problema combinatório e façam uso de estratégias válidas e diversificadas de resolução. Em geral, a estratégia mais utilizada pelas crianças, neste estudo, foram os desenhos e a listagem, sendo estas duas das estratégias considerada válidas para a resolução dos problemas combinatórios. Além disso, acreditamos que o trabalho com todas as situações combinatórias de uma vez só, para o ano e questão, dificultou a compreensão da Combinatória.

O processo de intervenção

O processo de intervenção foi realizado de forma separada nos dois grupos. Primeiro foi realizada a intervenção com o grupo A no qual abordamos as questões apresentadas no pré-teste, discutindo sobre os quatro tipos de problemas combinatórios, refletindo sobre suas características e sobre o processo de generalização.

Logo após, as crianças foram incentivadas a mostrarem o caminho percorrido até encontrarem as respostas. Em seguida, foram propostos novos problemas combinatórios - cada tipo por vez- para que as mesmas fossem resolvendo com o auxílio das fichas e em pequenos grupos. Neste momento a interventora chamava sempre atenção das crianças para os invariantes da questão, além das possíveis estratégias e generalização.

Alguns aspectos como a falta de espaços, e concentração das crianças, tirando o foco dos invariantes da questão e se prendendo as figuras dificultaram um pouco o processo de intervenção.

Com o grupo B, além destas dificuldades presentes relatadas acima a falta das fichas para encontrar as outras possibilidades possíveis acabou confundindo um pouco os alunos, pois, algumas vezes os mesmos, influenciado pela falta do material manipulável, acreditavam ter esgotado todas as possibilidades. De modo que concluímos que a falta das fichas não auxiliou na ideia de generalização embutida na resolução de problemas combinatórios.

Acreditamos, ainda, que o trabalho com todos os problemas combinatórios ao mesmo tempo durante a intervenção dificultou na compreensão dos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental. Percebemos que, caso a intervenção tivesse acontecido individualmente com os problemas ou trabalhando com os problemas em forma de dupla, talvez os alunos pudessem ter compreendido de forma mais clara seus invariantes e entendido suas formas de resolução.

Considerações Finais

Com o presente estudo foi possível perceber que o material manipulável, neste momento do modo no qual foi trabalhado, não influencia no desenvolvimento do raciocínio combinatório, assim como a forma no qual este material é trabalhado também não garante o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Acreditamos, ainda, que durante o processo de intervenção, para o ano escolar aqui pesquisado, o trabalho com todos os tipos de problemas combinatórios, ao mesmo tempo, não ajudou na construção desse conceito. Entendemos, então, que para os anos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental é importante que tais situações sejam trabalhadas de forma isoladas ou de dois em dois, a fim de dar oportunidade aos alunos compreenderem de forma mais clara tais diferenças.

Com relação à generalização apresentada aos alunos do Grupo B, como destacado anteriormente, fica evidenciada a dificuldade de tais alunos para a construção dessa ideia.

Ressaltamos que, mais importante que o uso do material e a forma no qual este material é utilizado, é o desenvolvimento de um trabalho sistemático, destacando os invariantes, evidenciando suas diferenças e semelhanças, além das possíveis estratégias a serem realizadas em cada um dos problemas combinatórios.

Tal estudo também possibilita perceber que o uso desses materiais deixa as crianças mais motivadas para solucionar os problemas combinatórios propostos, de modo que defendemos o uso deste recurso como auxílio para a motivação das crianças e construção do conceito da Combinatória, assim como defendemos o uso de outras ferramentas e estratégias que possam motivar e levar os estudantes a se apropriarem do conhecimento. Contudo, reforçamos que a intervenção docente se faz extremamente necessária neste percurso.

Referências

ANANIAS, B; PESSOA, C. O uso do material manipulativo e do cálculo mental na resolução de problemas de multiplicação por alunos do 3° ano do Ensino Fundamental. **Caderno de Trabalho de Conclusão de Curso.** UFPE. Recife, 2014. Disponível em: < https://www.ufpe.br/ce/images/Graduacao_pedagogia/pdf/2014.2/o-uso-so-material-manipulativo-e-do-calculo.pdf>. Acesso em: 10 de junho de 2017.

ASSIS, Adryanne Maria Rodrigues Barreto de. Conhecimento de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora. **Dissertação**. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2014.

ASSIS, A; MAGALHÂES, S. Amor, Roma e Mora: O raciocínio combinatório nos livros didáticos do 2° ao 5° do Ensino Fundamental In: **Anais...** 4° Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco (IV EPEPE). Caruaru, 2012.

BARRETO, F; AMARAL, F; BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos das series iniciais. **Caderno de Trabalho de Conclusão de Curso de Pedagogia.** – UFPE, 2007.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática.** 1° a 4° série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRITO, A, F; BELLEMAIN, P, M, B. O uso de material manipulativo como recurso didático: construção da grandeza comprimento. **Anais… II** Simpósio Internacional de Educação Matemática - SIPEMAT. Recife, 2008.

CAMACHO, Mariana. Materiais Manipuláveis no Processo de Ensino/Aprendizagem da matemática: Aprender explorando e construindo. **Dissertação.** Universidade da Madeira. Funchal, 2012.

FLORENCIO, R; GUIMARÃES G. A resolução de problemas de Produto Cartesiano na Educação Infantil. **Caderno de Trabalho de Conclusão de Curso de Pedagogia** – UFPE. Recife, 2017.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didático s manipuláveis.** In: LOREZEATO, Sergio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p.3 - 38.

LIMA, Itatiane; Aulas de combinatória no Ensino Médio: como estão ocorrendo? **Anais**...Ebrapem. 2015. Disponível em < http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd3_itatiane_borges_lima.pdf> Acesso em: 11 abr. 2017.

MATOS, J, M; SERRAZINA, M de L. **Didática da matemática.** Universidade Aberta: Lisboa, 1996.

MERAYO; F. **Matemática discreta.** Madri: Thomson Paraninfon, 2001.

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

ROFRIGUES, F; GAZIRE, E. Reflexões sobre o uso de materiais didático manipulável no Ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática. ISSN 1981-1322 Florianópolis v.07, n.2, p.187-192, 2012.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª serie. **Zetetike** – Cempem – FE – Unicamp – v17, n.31 – jan/jun – 2009.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, L. Resolução de problemas combinatórios a partir de material manipulativo e de lápis e papel: intervenção no Ensino Fundamental. **Revista Educação Online**, n.18, jan-mai 2015, p 1-26.

SANTOS, M; MATIAS, P; PESSOA, C. **O raciocínio combinatório na Educação Infantil.** Caderno de TCC do CE-UFPE. 2011.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds). **Acquisition of mathematics:** Concepts and process. New York : Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad -** Problemas de la enseñanzan de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico : Trillas, 1991.

______, G. A teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, J (org.) **Didática das Matemáticas.** Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.

______, G. (1986). **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** Análise Psicológica, 1. 1986.